

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*



DIPLOMSKA NALOGA

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE GRADBENIŠTVO

Ljubljana, 2022

Univerza
v Ljubljani

*Fakulteta za
gradbeništvo in
geodezijo*



Kandidat/-ka:

Diplomska naloga št.:

Graduation thesis No.:

Mentor/-ica:

Predsednik komisije:

Somentor/-ica:

Član komisije:

Ljubljana, _____

POPRAVKI – ERRATA

Stran z napako	Vrstica z napako	Namesto	Naj bo
----------------	------------------	---------	--------

»Ta stran je namenoma prazna.«

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Matjažu Dolšku za korektno vodenje, usmerjanje, odzivnost, nasvete in predano znanje.

Zahvaljujem se somentorju doc. dr. Robertu Klincu za vso tehnično in moralno podporo, praktične nasvete ter pomoč pri postavitvi spletne aplikacije.

Najlepša hvala tudi vsem profesorjem, ki so nam v preteklih treh letih skrbno predajali znanje in v nas prebujali bodoče inženirje. Posebej se zahvaljujem asist. dr. Anžetu Babiču, ki je poleg mentorja s korektno in zanimivo izvedenimi vajami pri predmetu Osnove potresnega inženirstva zaslužen za to, da se je v meni vzbudilo zanimanje za to področje.

Za pomoč pri študiju, motivacijske besede in nepozabne trenutke v šolskih klopih se zahvaljujem še vsem sošolcem in mlajšim kolegom. Upam, da bomo ostali povezani še naprej, pa ne samo preko Zoom-a.

Zadnja zahvala pa je namenjena družini in vsem najbližjim, ki so mi študij omogočili in mi stali ob strani tudi, ko je bilo treba rešiti enačbo gibanja za problem, ki ga aplikacija ne ponuja, tj. dinamična obtežba življenja. Najlepša hvala!

»Ta stran je namenoma prazna.«

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	004.42:624.7(043.2)
Avtor:	Neja Fazarinc
Mentor:	prof. dr. Matjaž Dolšek, univ. dipl. inž. grad.
Somentor:	doc. dr. Robert Klinc, univ. dipl. inž. grad.
Naslov:	Spletna aplikacija za učenje dinamičnega odziva enostavne konstrukcije
Tip dokumenta:	Diplomska naloga – univerzitetni študij
Obseg in oprema:	XIV, 56 str., 44 sl., 132 en., 1 pril., 16 virov
Ključne besede:	dinamika, enačba gibanja, dinamična obtežba, numerične metode, analitična rešitev, potres, spletna aplikacija, programiranje, Python

Izvleček

V diplomski nalogi obravnavamo reševanje enačbe gibanja s poudarkom na modelu z eno prostostno stopnjo in na izvedbi rešitev s pomočjo spletne aplikacije, ki smo jo razvili z namenom učenja dinamičnega odziva enostavne konstrukcije z izvedbo numeričnih eksperimentov. V prvem delu diplomske naloge predstavimo osnove teorije dinamične analize in razvijemo dve splošni numerični rešitvi ter specifični analitični rešitvi za primer lastnega nihanja in konstantne obtežbe. V drugem delu je opisan razvoj spletne aplikacije, ki vključuje programske skripte za analizo dinamičnega odziva modela z eno prostostno stopnjo, ki smo jih razvili v programskem jeziku Python. Delovni tok aplikacije je predstavljen na kratko v predzadnjem poglavju. V zadnjem delu diplomske naloge demonstriramo uporabo spletne aplikacije na osnovi testnih primerov, kjer spreminjamo parametre konstrukcije, vrste in lastnosti obtežbe, izbiro metode analize in parametre metode. Vsi izvedeni izračuni se tudi shranjujejo v bazo podatkov, vezano na uporabnika, tako da lahko uporabnik izbira različne izračune in jih med seboj primerja. Pokažemo, da lahko uporabnik primerja dinamični odziv konstrukcij na osnovi grafov, ki prikazujejo različne količine v odvisnosti od časa. Na ta način lahko dobi boljši občutek in vpogled tako v fenomene dinamičnega odziva konstrukcije kot tudi v natančnost numeričnih metod. Rezultate si lahko uporabnik tudi izvozi v obliki grafov. Z novo spletno aplikacijo smo zahtevno in težko predstavlljivo teorijo dinamike približali študentom ter vpeljali možnost interaktivnega učenja s pomočjo numeričnih eksperimentov. S testnimi primeri smo pokazali, da razvita spletna aplikacija omogoča reševanje osnovnih dinamičnih problemov z malo vloženega truda, pri čemer ima študent več časa, da pripravi zanimive primere, ob tem pa preučuje tudi natančnost numeričnih metod dinamične analize konstrukcij. Spletno aplikacijo je možno v prihodnosti nadgraditi, na primer z novimi primeri iz dinamike konstrukcij, z dodatnim seznamom akceleroگرامov, novimi numeričnimi metodami in različnimi vrstami prikaza rezultatov.

»Ta stran je namenoma prazna.«

BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC: 004.42:624.7(043.2)
Author: Neja Fazarinc
Supervisor: Prof. Matjaž Dolšek, Ph.D.
Co-supervisor: Assist. Prof. Robert Klinc, Ph.D.
Title: Web application for learning the dynamic response of a simple structure
Document type: Graduation Thesis – University studies
Notes: XIV, 56 p., 44 fig., , 132 eq., 1 ann., 16 ref.
Keywords: dynamics, equation of motion, dynamic loading, numerical methods, analytical solution, earthquake, web application, programming, Python

Abstract

The graduation thesis addresses solutions to the equation of motion by focusing on the single-degree-of-freedom model and the implementation of solutions in terms of a web application developed for learning the dynamic response of a simple structure by performing numerical experiments. In the first part of the thesis, we present the theoretical background of dynamic analysis of the structural model and derive two general numerical solutions and specific analytical solutions for the free vibration case and constant load case. In the second part, we describe the development of the web application that includes Python scripts to analyze the dynamic response of the single-degree-of-freedom model. The workflow of the application is briefly presented in the penultimate chapter. In the last part of the thesis, we demonstrate the use of the application by several examples involving different structural parameters, load types with various properties, and different analysis methods and their parameters. All performed calculations are also stored in the user's personal database so that the user can select several cases and compare them in terms of structural response history diagrams. We show that the user can compare the structural dynamic responses by graphs presenting different time-dependent quantities, making it possible for the user to improve insights into the phenomena of the dynamic response of structures and the accuracy of numeric methods. The user can also export the results in the form of graphs. With the new web application, we brought the challenging and difficult-to-conceive theory of structural dynamics closer to students and introduced the possibility of interactive learning based on numerical experiments. We have shown that the developed application enables students to solve basic problems of structural dynamics with little effort. Consequently, students can use the extra time to design interesting numerical experiments and investigate the accuracy of numerical analysis methods. However, the web application can be upgraded in the future with new examples from structural dynamics, an additional list of accelerograms, more numerical methods, and other forms of result representation.

»Ta stran je namenoma prazna.«

KAZALO

ZAHVALA.....	III
BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK	V
BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT	VII
KAZALO	IX
KAZALO SLIK.....	XI
OKRAJŠAVE IN SIMBOLI / ABBREVIATIONS AND SYMBOLS.....	XIII
1 UVOD	1
2 TEORETIČNE OSNOVE DINAMIČNE ANALIZE MODELA Z ENO PROSTOSTNO STOPNJO	3
2.1 Enačba gibanja	3
2.2 Analitične rešitve	5
2.2.1 Lastno dušeno in nedušeno nihanje	5
2.2.2 Konstantna obtežba	6
2.3 Numerični rešitvi	6
2.3.1 Metoda simetričnih diferenc	8
2.3.1.1 Algoritem za reševanje enačbe gibanja po metodi simetričnih diferenc:	11
2.3.2 Newmarkova- β metoda	12
2.3.2.1 Algoritem za reševanje	15
3 PREDSTAVITEV OBRAVNAVANIH PROBLEMOV	17
3.1 Lastno nihanje	17
3.2 Konstantna obtežba brez in z upoštevanjem hitrosti naraščanja obtežbe	18
3.3 Harmonična obtežba	20
3.4 Udarna obtežba	22
3.5 Potresna obtežba	23
3.5.1 Preučevanje tipa tal	24
4 PREDSTAVITEV SPLETNE APLIKACIJE	25
4.1 Namen in uporabljene metode	25
4.2 Opis programskega ozadja	29
5 TESTNI PRIMERI.....	35
5.1 Potresna obtežba: primerjava med komponentami	35
5.2 Razlika med numerično in analitično rešitvijo ter vpliv integracijskega koraka	41
5.3 Vpliv dušenja na lastno nihanje	47
6 SKLEP	53
VIRI.....	55

»Ta stran je namenoma prazna.«

KAZALO SLIK

Slika 1: a) Shematičen prikaz konzole, kot primer sistema z eno prostostno stopnjo b) Ponazoritev sistema z eno prostostno stopnjo z vozičkom in c) Shematičen prikaz sil, ki delujejo na voziček.....	3
Slika 2: Definicija relativnih in absolutnih pomikov pri gibanju modela SDOF pri potresni obtežbi	4
Slika 3: Pospešek v odvisnosti od časa kot funkcija $f\tau$ za izbran časovni korak Δt	12
Slika 4: Shematičen prikaz nihala z začetnim pomikom.....	17
Slika 5: Pomik v odvisnosti od časa za nedušeno lastno nihanje.....	18
Slika 6: Pomik v odvisnosti od časa za dušeno lastno nihanje in primerjava z eksponentno funkcijo maksimalnih amplitud pomikov.....	18
Slika 7: Konstantna obtežba v odvisnosti od časa.....	18
Slika 8: Ponazoritev statičnega in dinamičnega pomika na primeru horizontalne konzole.	19
Slika 9: Pomik v odvisnosti od časa pri konstantni obtežbi z upoštevanjem 5 % dušenja.....	19
Slika 10: Pomika v odvisnosti od časa pri konstanti obtežbi in za primer nedušenega nihanja.....	19
Slika 11: Obtežba v odvisnosti od časa za konstantno obtežbo z upoštevanjem hitrosti naraščanja obtežbe.	20
Slika 12: Dinamični faktor v odvisnosti od razmerja med časom nalaganja t_1 in nihajnim časom T . ..	20
Slika 13: Harmonična obtežba v smislu sinusne obtežbe.....	21
Slika 14: Dinamični faktor v odvisnosti od razmerja med vzbujevalno in lastno krožno frekvenco pri 5 % kritičnem dušenju.....	21
Slika 15: Obtežba v odvisnosti od časa za simetrično trikotno udarno obtežbo.	22
Slika 16: Obtežba v odvisnosti od časa za pravokotno udarno obtežbo.....	22
Slika 17: Obtežba v odvisnosti od časa za poljubno udarno obtežbo.....	22
Slika 18: Pomik v odvisnosti od časa za simetrično trikotno udarno obtežbo iz Slike 15.	23
Slika 19: Primer akceleroograma potresa Cape Mendocino (ZDA, 25. 4. 1992, $M_w=7,01$, reverzni prelom).	23
Slika 20: Uporabniški vmesnik spletne aplikacije »Response!« s polji za vnos in prikaz podatkov. ...	26
Slika 21: Prikaz polj za pripravo podatkov o potresni obtežbi.....	27
Slika 22: Prikaz polj za izbiro in vnos parametrov analize ter gumb za izračun.....	27
Slika 23: Preglednica rezultatov analiz v zavihku »Moji izračuni« in možnost za izbiro prikaza grafov ter prikaz možnih analitičnih rešitev.	28
Slika 24: Primer URL-ja z vmesno unikatno šifro za shranjevanje rezultatov.	28
Slika 25: Tristopenjska struktura spletne aplikacije.....	29
Slika 26: Pripravljen vektor obtežbe (datoteka <code>ustv_obtezba.json</code>).	30
Slika 27: Prikaz datotek pretočenih iz baze akceleroigramov.....	30

Slika 28: Prikaz .json datoteke z vsemi podatki o potresni obtežbi: a) podatki o komponentah (»components«), b) splošni podatki o potresu (»meta«) in c) prikaz prvih treh vrednosti vektorja pospeškov za komponento pospeškov H1 (»acc1«).	31
Slika 29: Interna baza akcelrogramov in prikaz poimenovanja glede na ID zapisa.	31
Slika 30: Oblika pripravljenih rezultatov za prikaz.	33
Slika 31: QR-koda s povezavo do aplikacije (URL: http://response.apps.fgg.si/).	33
Slika 32: Model portalnega okvirja: a) pogled v ravnini x-z b) pogled v ravnini y-z in uporabljen prerez.	35
Slika 33: Primerjava komponent potresne obtežbe: a) uporabniški vmesnik z vhodnimi podatki, b) seznam rezultatov.	36
Slika 34: Primerjava komponent potresne obtežbe v odvisnosti od časa.	37
Slika 35: Kinematične količine v odvisnosti od časa za vse tri komponente potresne obtežbe: a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»Se nadaljuje...«)	37
Slika 36: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za potresno obtežbo: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. (»Se nadaljuje...«)	39
Slika 37: Primerjava numerične in analitične rešitve ter vpliv velikosti integracijskega koraka: a) vnos podatkov v uporabniški vmesnik, b) preglednica izvedenih analiz.	42
Slika 38: Zunanja obtežba v odvisnosti od časa.	43
Slika 39: Kinematične količine v odvisnosti od časa za vse različne velikosti integracijskega koraka pri numerični analizi za konstantno zunanjo obtežbo: a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»Se nadaljuje...«)	43
Slika 40: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za konstantno obtežbo brez dušenja: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. (»Se nadaljuje...«)	45
Slika 41: Opazovanje vpliva dušenja na lastno nihanje: a) vnos podatkov v uporabniški vmesnik, b) izbira primerov iz seznama rezultatov.	48
Slika 42: Zunanja obtežba pri lastnem nihanju.	49
Slika 43: Kinematične količine v odvisnosti od pri lastnem nihanju in treh različnih primerih dušenja: a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»Se nadaljuje...«)	49
Slika 44: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za lastno nihanje: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. (»Se nadaljuje...«)	51

OKRAJŠAVE IN SIMBOLI / ABBREVIATIONS AND SYMBOLS

CDM	Central Difference Method – metoda simetričnih diferenc
HTML	Hypertext Markup Language – označevalni jezik s katerim se preko značk in atributov izdelujejo spletne strani
JavaScript	Skriptni jezik JavaScript
MDOF	Multiple degrees of freedom – več prostostnih stopenj
PHP	Programski jezik PHP, Hypertext Preprocessor, orodja za osebno spletno stran
Python	Programski jezik Python
SDOF	Single degree of freedom – ena prostostna stopnja
UML	Unified Modeling Language – standardni jezik za modeliranje računalniških sistemov
c	Koeficient dušenja
DF_{max}	Maksimalni dinamični faktor
k	Koeficient togosti
T	Lastni nihajni čas
u	pomik
\dot{u}	hitrost
\ddot{u}	pospešek
ω	Lastna krožna frekvenca
Ω	Krožna frekvenca harmonične obtežbe
ξ	Delež kritičnega dušenja

»Ta stran je namenoma prazna.«

1 UVOD

Odziv konstrukcije pri dinamični obtežbi je odvisen tako od lastnosti obtežbe kot tudi od konstrukcije, zato pride do pojava različnih fenomenov. Njihovo razumevanje je mnogo bolj zapleteno od razumevanja odziva konstrukcije na statično obtežbo. Študentke in študenti si zato težje ustvarimo občutek in predstavo o odzivu konstrukcije na dinamično obtežbo. Poleg tega je možno odziv konstrukcije na dinamično obtežbo analizirati na več različnih načinov. Analitične rešitve so na voljo le za najenostavnejše konstrukcije in tipe obtežbe, zato se večino problemov odziva konstrukcije pri dinamični obtežbi rešuje z numeričnimi metodami, ki pa niso eksaktne. Vpogled v dinamični odziv konstrukcij lahko dobimo s pomočjo numerične integracije enačbe gibanja, ki jo lahko izvednotimo s pomočjo MS Excel preglednic. Priprava podatkov za posamezen primer je precej zamudna, predvsem, če želimo primerjati rezultate več analiz hkrati, da bi preučevali vpliv določenega vhodnega podatka analize na odziv konstrukcije v smislu kinematičnih količin (tj. pomik, hitrost in pospešek) oziroma pripadajočih sil v odvisnosti od časa.

Da bi naslovili opisane probleme in izzive, smo razvili spletno aplikacijo za reševanje enačbe gibanja modela z eno prostostno stopnjo (SDOF) pri dinamični obtežbi. Aplikacija omogoča izračun odzive modela SDOF v odvisnosti od časa in je razvita na način, da dinamični odziv konstrukcije približa študentom. Zato je uporabniški vmesnik zastavljen tako, da je možno s čim manj vhodnih podatkov pridobiti in primerjati rezultate različnih dinamičnih problemov z različnimi metodami dinamične analize. Čeprav je aplikacija preprosta za uporabo, omogoča reševanje enačbe gibanja za različne vrste dinamične obtežbe (konstantna obtežba, udarna obtežba, harmonična obtežba, potresna obtežba) in lastnega nihanja, pri čemer se lahko upošteva vpliv togosti, mase in dušenja konstrukcije ter vrste in parametre numeričnih metod, vgrajenih v spletno aplikacijo.

Nekaj spletnih aplikacij za reševanje različnih problemov s področja potresnega inženirstva je bilo že razvitih na Inštitutu za konstrukcije, potresno inženirstvo in računalništvo pod okriljem Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Leta 2012 sta bili razviti metodologija in spletna aplikacija za račun približnih krivulj inkrementalne dinamične analize (Peruš et al. 2012). Kasneje pa je bila razvita še bolj zapletena spletna aplikacija, ki omogoča izbor karakterističnih zapisov gibanja tal za izvedbo majhnega števila nelinearnih dinamičnih analiz (Dolšek et al. 2015; Klinc et al. 2019) ter za določitev faktorja obnašanja osnovanega na ciljnem tveganju (Žižmond et al. 2020). Pri razvoju nove spletne aplikacije, ki jo opisujemo v diplomski nalogi, smo izhajali iz spoznanj predhodnih študij, ki so naslavljalale področje potresnega inženirstva in informacijskih tehnologij.

Diplomska naloga je vsebinsko razdeljena na štiri glavne dele. V drugem poglavju so na kratko opisane teoretične osnove dinamike modela z eno prostostno stopnjo. Predstavljena je enačba gibanja za model z eno prostostno stopnjo. Enačba gibanja je v okviru drugega poglavja zapisana tako, da so neznanke enačbe relativne kinematične količine, saj je ta oblika bolj primerna za reševanje problema odziva konstrukcij pri dinamični obtežbi. Sledi predstavitev nekaterih znanih analitičnih rešitev dinamičnega odziva enostavne konstrukcije, nato pa še dve numerični metodi. Opisane so končne enačbe in algoritmi za implementacijo Newmarkove metode in metode simetričnih diferenc. Predstavljeni sta torej dve metodi numeričnega reševanja, tako za model z eno prostostno stopnjo, kot tudi splošna rešitev za sistem

z več prostostnimi stopnjami. Opisani algoritmi za izvedbo numeričnih rešitev, ki so vključeni v okviru spletne aplikacije, pa se nanašajo le na model SDOF.

V tretjem poglavju sledi kratka predstavitev obravnavanih dinamičnih obtežb in rešitev. Predstavljen je tudi pomen dinamičnega faktorja. Poleg analize lastnega dušenega in nedušenega nihanja prikažemo še problem konstantne obtežbe z in brez upoštevanja hitrosti naraščanja obtežbe, trikotno in pravokotno udarno obtežbo, harmonično obtežbo in odziv konstrukcije na potres z upoštevanjem akceleroграмov dejanskih potresov.

V četrtem poglavju je v dveh delih opisana spletna aplikacija, ki predstavlja rezultat praktičnega dela naloge. V prvem delu je na kratko opisan uporabniški vmesnik, v drugem pa programsko ozadje spletne aplikacije. Za lažjo predstavbo je dodan diagram poteka procesov, s katerim ponazorimo zgradbo spletne aplikacije in način prenosa podatkov med programi. Daljša razlaga diagrama poteka procesov spletne aplikacije je podana v Prilogi A. Spletna aplikacija temelji na programskih skriptah za analizo odziva konstrukcije pri dinamični obtežbi, ki so razvite v programskem jeziku Python. Poleg tega je bil za izdelavo zasnove izgleda uporabljen program PowerPoint, za grafično oblikovanje pa program Canva. Postavitev spletne strani je narejena v opisnem jeziku HTML, za izris grafov, dinamično klicanje in izmenjavo podatkov pa sta uporabljena programski jezik PHP in skriptni jezik JavaScript.

Uporaba spletne aplikacije je prikazana s testnimi primeri v petem poglavju. Ti pokažejo končni rezultat diplomske naloge, izgled aplikacije in njeno delovanje ter nekaj možnosti nalog oziroma problemov, ki se jih lahko s pomočjo te aplikacije rešuje. Aplikacija omogoča primerjanje numeričnih in analitičnih rešitev, natančnost numerične rešitve glede na izbran integracijski korak, vpliv tipa tal na odziv konstrukcije, primerjavo komponent potresne obtežbe, vpliv parametrov konstrukcije na pomike, vpliv dušenja in opazovanje posebnosti pri odzivih na različne tipe obtežbe.

Na koncu diplomske naloge so podane glavne ugotovitve. Podan je tudi predlog za nadaljnji razvoj spletne aplikacije. Diplomska naloga se zaključí z navedbo spiska uporabljenih virov.

2 TEORETIČNE OSNOVE DINAMIČNE ANALIZE MODELA Z ENO PROSTOSTNO STOPNJO

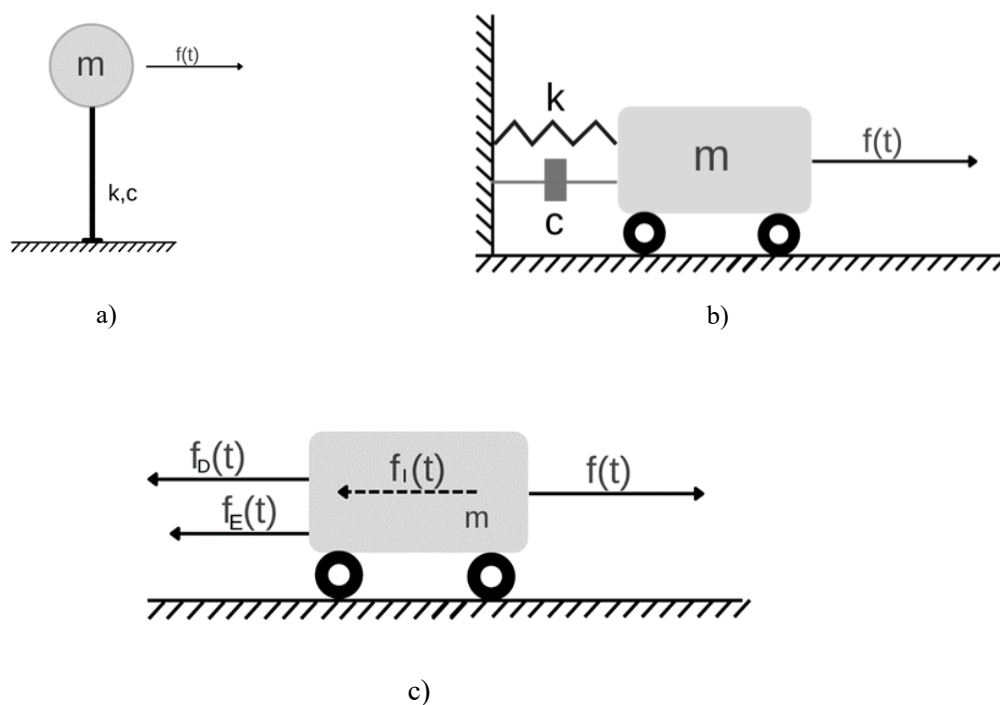
2.1 Enačba gibanja

Enačba gibanja modela konstrukcije z eno prostostno stopnjo (v nadaljevanju SDOF) je možno izpeljati na osnovi II. Newtonovega zakona;

$$F = ma \quad (1)$$

kjer F predstavlja, m maso modela SDOF, a pa absolutni pospešek mase.

Za lažjo interpretacijo vsote vseh sil, ki delujejo na model SDOF, si model SDOF zamislimo tako, kot je prikazano na Sliki 1. Na voziček deluje več sil. Poleg zunanje sile $f(t)$ na voziček delujejo še sila dušenja $f_D(t)$ in notranja sila $f_E(t)$ ter vztrajnostna sila $f_I(t)$, ki izhajajo iz drugega Newtonovega zakona (tj. desna stran En. (1)) (Slika 1c).



Slika 1: a) Shematičen prikaz konzole, kot primer sistema z eno prostostno stopnjo b) Ponazoritev sistema z eno prostostno stopnjo z vozičkom in c) Shematičen prikaz sil, ki delujejo na voziček.

Če na osnovi statičnega ravnotežja sil predpostavimo, da pozitivna zunanja obtežba povzroči pozitiven pomik, ostale sile pa so nasprotnega predznaka, lahko En. (1) preoblikujemo sledeče:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_E(t) = f(t) \quad (2)$$

Sile iz En.(2) lahko v naslednjem koraku povežemo s kinematičnimi količinami in dobimo:

$$m\ddot{u}_a(t) + c\dot{u}_r(t) + ku_r(t) = f(t) \quad (3)$$

Kjer je \ddot{u}_a absolutni pospešek, \dot{u}_r relativna hitrost in u_r relativni pomik. V enačbi nastopajo še oznake m (masa konstrukcije), c (koeficient dušenja) in k (koeficient togosti). En. (3) je nehomogena diferencialna enačba drugega reda. V splošnem jo lahko rešimo numerično, kot je prikazano v nadaljevanju.

Kadar predpostavimo gibanje podpor (npr. gibanje tal pri potresni obtežbi), je smiselno enačbo preoblikovati tako, da v njej kot neznanke nastopajo relativne kinematične količine (Fajfar 1980). V primeru potresne obtežbe upoštevamo, da je zunanja obtežba $f(t) = 0$, torej nimamo zunanje sile. Zato lahko En. (4) v nekaj korakih preoblikujemo v enačbo gibanja modela SDOF pri potresni obtežbi:

$$m\ddot{u}_a(t) + c\dot{u}_r(t) + ku_r(t) = 0, \quad (4)$$

$$u_a(t) = u_t(t) + u_r(t), \quad (5)$$

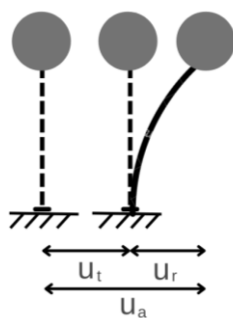
$$\ddot{u}_a(t) = \ddot{u}_t(t) + \ddot{u}_r(t), \quad (6)$$

$$m(\ddot{u}_r(t) + \ddot{u}_t(t)) + c\dot{u}_r(t) + ku_r(t) = 0, \quad (7)$$

$$m\ddot{u}_r(t) + c\dot{u}_r(t) + ku_r(t) = -m\ddot{u}_t(t), \quad (8)$$

kjer smo upoštevali, da absolutni pomik oziroma pospešek razčlenimo na pomik oziroma pospešek tal in relativni pomik oziroma pospešek mase modela SDOF glede na podporo (Slika 2). V En. (8) se potresna obtežba izraža kot zunanja obtežba, ki je enaka produktu mase in negativne vrednosti pospeška tal. Enačbo 8 pa lahko preoblikujemo tudi na način, da je primerna za reševanje v primeru, da so neznanke absolutne kinematične količine. S takšnim preoblikovanjem pridemo do En. (9).

$$m\ddot{u}_a + c\dot{u}_a + ku_a = c\dot{u}_t + ku_t \quad (9)$$



Slika 2: Definicija relativnih in absolutnih pomikov pri gibanju modela SDOF pri potresni obtežbi

Predstavljene enačbe gibanja modela SDOF lahko uporabimo za preučevanje dinamične analize enostavnih konstrukcij, kjer je dovolj natančno, da opišemo gibanje tega sistema z eno prostostno stopnjo. V praktičnem smislu lahko tako aproksimiramo preproste konstrukcije, kot so konzole, enoetažni okvirji, včasih tudi enonadstropne stavbe. Za sistem z več prostostnimi stopnjami (MDOF) je enačba gibanja analogna predstavljenim enačbam gibanja modela SDOF, le da namesto skalarnih vrednosti spremenljivk oziroma konstant operiramo z vektorji oziroma matrikami. Ne glede na to, da so v nadaljevanju nekatere izpeljave podane z upoštevanje enačbe gibanja za model MDOF, se v okviru te diplomske naloge osredotočimo zgolj na reševanje enačbe modela SDOF.

V nadaljevanju podajamo nekaj analitičnih rešitev enačbe gibanja modela SDOF, saj so take rešitve možne le za enostavne dinamične obtežbe. Za preostale primere, kamor uvrščamo tudi potresno obtežbo, pa je treba enačbo gibanja rešiti numerično, kot je predstavljeno v nadaljevanju.

2.2 Analitične rešitve

Analitične rešitve za probleme dinamičnega odziva modela SDOF ni možno izpeljati za splošno dinamično obtežbo. Zato si bomo v nadaljevanju predstavili rešitvi za lastno nihanje in konstantno obtežbo, ki sta vključeni tudi v spletno aplikacijo z namenom grafične ponazoritve natančnosti numeričnih rešitev.

2.2.1 Lastno dušeno in nedušeno nihanje

Lastno nihanje je po definiciji nihanje, ko konstrukciji vsilimo začetne pogoje, na primer začetni pomik in/ali hitrost, zunanja obtežba pa je enaka nič. Lastno nihanje sprožita začetna pogoja, sistem pa se nato želi vrniti v svojo ravnovesno lego, okoli katere niha. V splošnem analiza lastnega nihanja omogoča izračun lastnih nihajnih časov konstrukcije/sistema in pripadajočih nihajnih oblik. V diplomski in tudi spletni aplikaciji smo se omejili le na model SDOF tako, da iz analize lastnega nihanja izračunamo le nihajni čas.

Enačba gibanja pri lastnem nihanju je sledeča:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (10)$$

Če enačbo delimo z maso in vpeljemo novi spremenljivki:

$$\omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k}{m} \text{ in} \quad (11)$$

$$\frac{c}{m} \stackrel{\text{def}}{=} 2\xi\omega, \quad (12)$$

kjer sta ω in c lastna krožna frekvenca nedušenega modela SDOF in koeficient dušenja, lahko En.(10) preoblikujemo v

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0. \quad (13)$$

Dobimo torej homogeno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki jo rešujemo s pomočjo nastavka

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)) \quad (14)$$

Iščemo torej dve neznani konstanti (A in B). ξ v zgornjih enačbah predstavlja delež kritičnega dušenja, ki po priporočilih standarda Evrokod 8 znaša 5 % oziroma 0,05. V En. (14) nastopa poleg lastne krožne frekvence nedušenega modela SDOF še lastna krožna frekvenca z upoštevanjem vpliva dušenja, zato se pojavi še indeks D . Zveza med ω in ω_D je sledeča:

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (15)$$

Neznani konstanti v zgornjem nastavku za rešitev poiščemo s pomočjo začetnih pogojev in dobimo končno rešitev za obe konstanti in pomik modela SDOF pri lastnem nihanju z upoštevanjem vpliva dušenja:

$$B = u_0, \quad (16)$$

$$A = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}, \quad (17)$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + u_0 \cos(\omega_D t) \right). \quad (18)$$

V primeru, da je dušenje enako nič (rešujemo torej primer lastnega nedušenega nihanja, $c = 0$), se zgornja enačba poenostavi v En. (19).

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t) + u_0 \cos(\omega t) \quad (19)$$

2.2.2 Konstantna obtežba

Pri konstantni obtežbi ob predpostavki, da ni dušenja ($c = 0$), rešujemo enačbo oblike:

$$m\ddot{u} + ku = f_0, \quad (20)$$

kjer je f_0 konstantna sila, ki se s časom ne spreminja, vendar je stalno prisotna na konstrukciji in hipno naraste na vrednost f_0 . En. (20) je diferencialna enačba drugega reda, za katero poiščemo homogeno rešitev (En. (21-22)) in nastavek za partikularno rešitev diferencialne enačbe (En. (23)):

$$m\ddot{u}_H + ku_H = 0, \quad (21)$$

$$u_H = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (22)$$

$$u_p = C. \quad (23)$$

Sledi iskanje partikularne rešitve, ki je enaka konstanti C . Če konstanto vstavimo v En. (20) in jo odvajamo ter upoštevamo, da je odvod konstante enak 0, pridemo do rešitve za konstanto C :

$$kC = f_0, \quad (24)$$

$$u_p = C = \frac{f_0}{k}. \quad (25)$$

Dejanska rešitev predstavlja seštevek homogene in partikularne rešitve, pri čemer pa je treba konstanti A in B določiti z upoštevanjem začetnih pogojev, kot sledi:

$$u = u_H + u_p, \quad (26)$$

$$u = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{f_0}{k}, \quad (27)$$

$$u_0, \dot{u}_0 = 0 \Rightarrow A = 0, B = -\frac{f_0}{k}. \quad (28)$$

Rešitev enačbe za nedušeno nihanje pri konstantni obtežbi je torej:

$$u(t, c = 0) = \frac{f_0}{k} (1 - \cos(\omega t)). \quad (29)$$

Če upoštevamo še vpliv dušenja, pridemo do podobnega izraza, vendar so periodične funkcije, s katerimi opišemo nihanje, pomnožene z eksponentno funkcijo, katere vrednost se v odvisnosti od deleža kritičnega dušenja s časom zmanjšuje:

$$u(t) = \frac{f_0}{k} (1 - e^{-\xi \omega t} (\cos(\omega t) + \xi \sin(\omega t))). \quad (30)$$

Zgornja enačba (povzeta po Fajfar, 1980) zanemari vpliv dušenja na lastno periodo, zato lahko pri večjem deležu dušenja pride do razlike med dejansko in izračunano krožno frekvenco.

2.3 Numerični rešitvi

Rešitev dinamičnega odziva modela SDOF lahko za poljubno obtežbo rešimo z numeričnimi metodami, kjer dinamični problem rešujemo tako, da čas razdelimo na veliko število krajših intervalov, rešitve pa nato iščemo le v tako določenih časovnih korakih. Enak princip velja za določitev zunanje obtežbe, saj jo je treba, če v splošnem nastopa v funkcijski obliki, pretvoriti v vektor obtežbe, kjer vsaka komponenta vektorja predstavlja zunanjo obtežbo v določenem časovnem koraku. Ker so algoritmi za reševanje enačbe gibanja splošni, jih lahko uporabimo za poljubno dinamično obtežbo. To je ena od bistvenih razlik glede na analitično reševanje, saj je analitična rešitev specifična glede na vrsto obtežbe.

Za reševanje enačbe gibanje v enem časovnem koraku oziroma znotraj časovnega intervala je treba vpeljati določene predpostavke, ki omogočijo izračun kinematičnih količin na koncu obravnavanega časovnega koraka. Zaradi tega so različni avtorji razvili različne metode numeričnega reševanja enačbe gibanja. Vsem pa je skupno, da s krajšanjem intervala pridemo do bolj točnih rešitev (bližje analitičnim).

Numerične metode so ugodne tudi z vidika reševanja enačbe gibanja s pomočjo računalnika, ker temeljijo na preprostih algoritmih, ki se ponavljajo v zankah. V splošnem delimo metode na eksplcitne in implicitne. Pri implicitnih metodah kinematične količine na koncu časovnega intervala izračunamo tako, da predpostavimo gibanje znotraj časovnega intervala na osnovi predpostavljene funkcijske oblike pospeškov. Kinematične količine na koncu časovnega intervala izračunamo iz znanih vrednosti kinematičnih količin na začetku obravnavanega časovnega intervala. Pri eksplcitnih metodah, pomik v naslednjem časovnem koraku določimo neposredno z upoštevanjem pomika v predhodnih časovnih korakih. Slednji pristop je bolj matematičen, nekoliko bolj zahtevno je tudi programiranje numerične rešitve, prednost pa je v tem, da za izračun pomika na koncu intervala potrebujemo le pomike iz predhodnih intervalov, ne pa tudi hitrosti in pospeškov. Natančnost obeh tipov metod je odvisna od izbrane dolžine integracijskega koraka, pri čemer eksplcitne metode za doseg enake natančnosti zahtevajo krajši integracijski korak kot implicitne, kar pa zaradi zmogljivosti računalnikov običajno ne predstavlja merodajne omejitve, še posebej za potrebe te diplomske naloge, kjer smo se omejili na model SDOF. Pri numeričnih metodah je pomembna tudi stabilnost numerične rešitve. Pri eksplcitnih metodah se nam pri prevelikem izbranem integracijskem koraku lahko zgodi, da rešitve brezmejno naraščajo, zato je treba upoštevati določene pogoje, da dobimo stabilne rešitve. Takšne metode so torej pogojno stabilne. Implicitne metode so večinoma manj občutljive na izbiro velikosti koraka, nekatere od teh metod so celo brezpogojno numerično stabilne.

Čeprav so numerične metode splošne, je treba biti pri uporabi teh metod previden, saj rešitve niso nujno dovolj natančne. Zato na koncu poglavja o posamezni metodi navajamo kriterije za zagotavljanje stabilnosti. Glede natančnosti se moramo zavedati, da je napaka pri numeričnem reševanju enačbe gibanja neizbežna (Chopra, 1995). Ker so rešitve enačbe gibanja posplošene harmonične funkcije, lahko do nenatančnosti pride predvsem zaradi dveh fenomenov. To sta podaljšanje periode in zmanjševanje amplitude. Podaljšanju periode pravimo tudi disperzija, zmanjšanju amplitude pa numerično dušenje (Villaverde, 2009). Metodi, predstavljeni v nadaljevanju, ne povzročata umetnega dušenja, bolj kritična je sprememba dolžine lastne periode. Uporaba metode simetričnih diferenc pri izbiri časovnega intervala, ki izpolnjuje tudi pogoj stabilnosti privede do najmanjše spremembe dolžine periode, pri izbiri časovnega koraka večjega od predstavitvene meje, pa ima ta metoda največji vpliv na dolžino periode in sicer tako, da skrajša periodo. Metoda simetričnih diferenc je torej primerna predvsem za model SDOF, kadar izpolnimo pogoj stabilnosti (Chopra, 1995). Natančnost metod je odvisna predvsem od izbranega razmerja med dolžino časovnega koraka in lastnim nihajnim časom konstrukcije. Izbira razmerja $\Delta t = 0,1T_N$, kjer T_N predstavlja najkrajši nihajni čas konstrukcije, načeloma že zagotavlja zadostno natančnost. Manjši časovni interval je smiselni predvsem pri obtežbi netipične oblike, kjer se obtežba lahko hitro spreminja. Tak primer so potresi, saj se potresna obtežba zelo hitro spreminja, na primer z intervalom $\Delta t = 0,02s$. Zato je smiselno, da v primeru analize potresa tudi numerično analizo izvedemo z enakim izbranim časovnim intervalom (Chopra, 1995). Izbira metode in časovnega intervala je torej odvisna predvsem od problema, ki ga želimo rešiti (Villaverde, 2009).

V nadaljevanju torej prikazujemo dve numerični metodi, in sicer metodo simetričnih diferenc, ki je eksplicitna metoda, in Newmarkovo metodo (Newmark, N. M., 1959), ki je klasična implicitna metoda, ki se uporablja za reševanje enačbe gibanja. Rešitve so povzete po (Villaverde, 2009). V splošnem so izpeljave numeričnih metod podobne za modele SDOF kot tudi za modele z več prostostnimi stopnjami (MDOF). V nadaljevanju podajamo obe rešitvi, vendar kasneje uporabimo le rešitve za model SDOF. Pri eni prostostni stopnji je računanje lažje, saj namesto matrik operiramo le s skalarji, princip reševanja pa je enak.

2.3.1 Metoda simetričnih diferenc

Metoda simetričnih diferenc predstavlja eno od metod končnih diferenc (Kozak, 2009), ki predstavljajo splošne metode za numerično reševanje diferencialnih enačb. Gre za eksplicitno metodo, kjer so rezultati enačbe gibanja na koncu obravnavanega intervala odvisni od rezultatov dveh predhodnih intervalov.

Izhajamo iz približka vrednosti funkcije v naslednjem koraku, ki ga določimo z razvojem funkcije v Taylorjevo vrsto, pri čemer dobimo približke za prvi in drugi odvod funkcije:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (31)$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (32)$$

ki jih nato uporabimo tudi za reševanje enačbe gibanja.

Za izračun odziva konstrukcije za primer splošne obtežbe, npr. potresne obtežbe, moramo rešiti enačbo gibanja za model MDOF:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = -[M]\{1\}\ddot{u}_g(t), \quad (33)$$

kjer je $[M]$ diagonalna masna matrika, če obravnavamo le bistvene prostostne stopnje ravninske stavbe, $[C]$ matrika dušenja, $[K]$ pa togostna matrika konstrukcije. Slednjo lahko dobimo z računanjem inverzne matrike podajnostne matrike. Vektor $\{1\}$ predstavlja enotski vektor pomikov konstrukcije kot togega telesa v smeri vzbujanja. Vektorji $\{u(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$ in $\{\ddot{u}(t)\}$ pa predstavljajo vektorje pomikov, hitrosti in pospeškov, ki so odvisni od časa, prav tako kot tudi pospeški tal $\ddot{u}_g(t)$.

Enačbo zapišemo za specifičen čas, kjer čas nastavimo na:

$$t = t_i = i\Delta t \quad (34)$$

$$[M]\{\ddot{u}\}_i + [C]\{\dot{u}\}_i + [K]\{u\}_i = -[M]\{1\}\ddot{u}_g(t_i). \quad (35)$$

Za iskanje rešitve si pomagamo z iskanjem približkov z razvojem Taylorjeve vrste;

$$u(t_i + \Delta t) = u(t_i) + \frac{\dot{u}(t_i)}{1!}\Delta t + \frac{\ddot{u}(t_i)}{2!}\Delta t^2 + \dots \quad (36)$$

$$u(t_i - \Delta t) = u(t_i) - \frac{\dot{u}(t_i)}{1!}\Delta t + \frac{\ddot{u}(t_i)}{2!}\Delta t^2 - \dots \quad (37)$$

Taylorjeva vrsta se v matematiki uporablja za izračun približne vrednosti funkcij v okolici točke, v kateri je vrednost znana in za oceno velikosti napake pri takšni aproksimaciji. Če od En. (35) odštejemo En. (36) in izpostavimo odvod pomika ob določenem času $\dot{u}(t_i)$, dobimo približek za hitrost:

$$\dot{u}(t_i) \cong \frac{u(t_i + \Delta t) - u(t_i - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (38)$$

Če enačbi seštejemo in dobljeno enačbo rešimo za drugi odvod pomika ob določenem času $\ddot{u}(t_i)$, dobimo približek za pospešek:

$$\ddot{u}(t_i) \cong \frac{u(t_i + \Delta t) - 2u(t_i) + u(t_i - \Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (39)$$

Če dobljeni formuli uporabimo analogno za računanje z vektorji, dobimo sledeči enačbi za vektor pospeškov in vektor hitrosti:

$$\{\ddot{u}\}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (\{u\}_{i+1} - 2\{u\}_i + \{u\}_{i-1}), \quad (40)$$

$$\{\dot{u}\}_i = \frac{1}{2\Delta t} (\{u\}_{i+1} - \{u\}_{i-1}), \quad (41)$$

pri čemer smo uporabili skrajšana zapisa za vektor pomikov:

$$\{u\}_{i+1} = \{u(t_i + \Delta t)\}, \quad (42)$$

$$\{u\}_{i-1} = \{u(t_i - \Delta t)\}. \quad (43)$$

Opazimo, da dobimo vektor pospeškov in vektor hitrosti, izražena le s pomiki. Dobljena izraza za vektorja hitrosti in pospeškov vstavimo v enačbo gibanja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} [M] (\{u\}_{i+1} - 2\{u\}_i + \{u\}_{i-1}) + \frac{1}{2\Delta t} [C] (\{u\}_{i+1} - \{u\}_{i-1}) + [K] \{u\}_i \\ = -[M] \{1\} \ddot{u}_g(t_i), \end{aligned} \quad (44)$$

pri čemer se čas lahko določi sledeče:

$$t = t_i = i\Delta t, \quad (45)$$

kjer je Δt izbran časovni interval. Vektor pomikov za korak $i + 1$ je edina neznan v En. (43). Zato enačbo preoblikujemo. Vpeljemo matriko nadomestne togosti in vektor nadomestne obtežbe:

$$[\hat{K}] = \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C], \quad (46)$$

$$\{\hat{F}\} = -[M] \{1\} \ddot{u}_g(t_i) + \left(\frac{2}{\Delta t^2} [M] - [K] \right) \{u\}_i + \left(\frac{1}{2\Delta t} [C] - \frac{1}{\Delta t^2} [M] \right) \{u\}_{i-1}. \quad (47)$$

Nadomestna togost je torej odvisna le od lastnosti konstrukcije (masne matrike in matrike dušenja) in izbranega časovnega intervala oziroma koraka. V vektorju nadomestne obtežbe (En. (47)) nastopajo poleg pospeška tal oziroma zunanje obtežbe še znani vektorji pomikov, ki so izračunani v prejšnjih dveh časovnih korakih. Nove spremenljivke so izražene tako, da dinamičen problem znotraj časovnega intervala, lahko zapišemo kot ekvivalenten statičen problem:

$$F = ku. \quad (48)$$

Z upoštevanjem matrike nadomestne togosti in nadomestne obtežbe lahko zato En. (43) izrazimo na sledeče način:

$$[\hat{K}] \{u\}_{i+1} = \{\hat{F}\}_i \quad (49)$$

in tako dinamični problem za določen trenutek prevedemo na ekvivalenten statičen problem ter izračunamo pomike:

$$\{u\}_{i+1} = [\hat{K}]^{-1} \{\hat{F}\}_i, \quad (50)$$

kjer se indeks i nanaša na čas t_i , indeks $i + 1$ pa na čas $t_i + \Delta t$. Rešitev se lahko uporabi rekurzivno. Če poleg pomika potrebujemo še drugi kinematični količini, hitrost in pospešek izračunamo s pomočjo enačb, ki smo ju izpeljali v predhodnih korakih:

$$\{\ddot{u}\}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (\{u\}_{i+1} - 2\{u\}_i + \{u\}_{i-1}) \text{ in} \quad (51)$$

$$\{\dot{u}\}_i = \frac{1}{2\Delta t} (\{u\}_{i+1} - \{u\}_{i-1}). \quad (52)$$

Poiskati moramo še rešitev za prvi korak. Za to potrebujemo pomik pri času $t = 0$, kar predstavlja začetni pogoj in ga običajno predpostavimo, da je enak 0, ter rešitev pri času $t = -\Delta t$. Ta rešitev ni znana, lahko pa jo izračunamo s pomočjo sledečih enačb:

$$\{\ddot{u}\}_0 = \frac{1}{\Delta t^2} (\{u\}_1 - 2\{u\}_0 + \{u\}_{-1}) \text{ in} \quad (53)$$

$$\{\dot{u}\}_0 = \frac{1}{2\Delta t} (\{u\}_1 - \{u\}_{-1}). \quad (54)$$

Iz slednje enačbe izpostavimo pomik pri prvem koraku $\{u\}_1$ in vstavimo dobljen izraz v En. (54). Potem poiščemo ne fizikalno rešitev za $\{u\}_{-1}$, in sicer v odvisnosti od kinematičnih količin pri času $t = 0$, ki predstavljajo naše začetne pogoje. Dobimo sledeč izraz:

$$\{u\}_{-1} = \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}\}_0 - \Delta t \{\dot{u}\}_0 + \{u\}_0. \quad (55)$$

Pri tem vektor začetnih pomikov $\{u\}_0$ in začetnih hitrosti $\{\dot{u}\}_0$ poznamo, pospeške pa lahko izračunamo s pomočjo enačbe gibanja pri času $t = 0$;

$$\{\ddot{u}\}_0 = -[M]^{-1}([C]\{\dot{u}\}_0 + [K]\{u\}_0) - \{1\}\ddot{u}_g(0). \quad (56)$$

Tako dobimo rešitev za vektor pomikov pri času $t = -\Delta t$, ki ga uporabimo za iskanje rešitev v prvem intervalu (koraku). Za naslednji korak uporabimo vektor pomikov pri času $t = 0$ in rezultate iz prvega intervala. Metodo ponavljamo do želenega časa opazovanja.

Metoda simetričnih diferenc je preprosta eksplicitna metoda, kjer se pomiki v izbranem intervalu nanašajo le na rešitve predhodnih dveh intervalov. Slabost te metode je, da je pogojno stabilna s strogim kriterijem za dosego stabilnosti:

$$\Delta t \leq \frac{T_N}{\pi} = 0,318T_N, \quad (57)$$

kjer T_N predstavlja najmanjši lastni nihajni čas modela MDOF. Ker so lahko vrednosti teh nihajnih časov v splošnem zelo kratke, postane izračun računsko potraten. Čeprav najvišja stopnja nihajne oblike redkokdaj znatno vpliva na odziv sistema, mora ostati integracija stabilna tudi za te nihajne oblike, drugače je končna rešitev brez smisla.

Ker bomo rešitev uporabili le za model SDOF, zgoraj opisan problem ni relevanten. Rešitev metode simetričnih diferenc je analogna predstavljeni rešitvi za model SDOF, le da matrike in vektorji preidejo v skalarje. Rešujemo torej enačbo gibanja za sistem SDOF:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = -m\ddot{u}_{gi} = f_i. \quad (58)$$

Enako kot v prejšnjem primeru si pri iskanju pomikov pri časih $t = t_i + \Delta t$ in $t = t_i - \Delta t$ pomagamo z razvojem Taylorjeve vrste:

$$u_{i+1} = u(t_i + \Delta t) = u(t_i) + \frac{\dot{u}(t_i)}{1!} \Delta t + \frac{\ddot{u}(t_i)}{2!} \Delta t^2 + \dots \quad (59)$$

$$u_{i-1} = u(t_i - \Delta t) = u(t_i) - \frac{\dot{u}(t_i)}{1!} \Delta t + \frac{\ddot{u}(t_i)}{2!} \Delta t^2 - \dots \quad (60)$$

Enačbi odštejemo, da dobimo hitrost (En. (61)) in seštejemo, da dobimo pospešek (En. (62)).

$$\dot{u}(t_i) \cong \frac{u(t_i + \Delta t) - u(t_i - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (61)$$

$$\ddot{u}(t_i) \cong \frac{u(t_i + \Delta t) - 2u(t_i) + u(t_i - \Delta t))}{\Delta t^2} \quad (62)$$

Upoštevamo še skrajšane oblike zapisa:

$$u(t_i + \Delta t) = u_{i+1}, \quad (63)$$

$$u(t_i - \Delta t) = u_{i-1}, \quad (64)$$

$$u(t_i) = u_i. \quad (65)$$

Dobljene izraze uporabimo v enačbi gibanja:

$$m \frac{1}{\Delta t^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + c \frac{1}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_{i-1}) + ku_i = -m\ddot{u}_{gi}. \quad (66)$$

Vpeljemo nadomestno togost in nadomestno silo, tokrat kot skalarni vrednosti, tako da dobimo sledeč izraz:

$$\tilde{k}u_{i+1} = \tilde{f}. \quad (67)$$

kjer sta vrednosti nadomestne togosti in nadomestne sile opredeljeni kot:

$$\tilde{k} = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}, \quad (68)$$

$$\tilde{f} = -m\ddot{u}_{gi} + u_i \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) + u_{i-1} \left(-\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right). \quad (69)$$

Iz En. (67) lahko izračunamo pomik u_{i+1} :

$$u_{i+1} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{k}}. \quad (70)$$

V zgornjih enačbah opazimo, da potrebujemo pomike dveh intervalov pred obravnavanim, torej za prvi interval poleg začetnih pogojev pri času $t = 0$ še pomik pri času $t = -\Delta t$. Da bi rešili ta problem, izhajamo iz enačb za pospešek in hitrost pri času $t = 0$:

$$\ddot{u}_0 = \frac{1}{\Delta t^2} (u_1 - 2u_0 + u_{-1}), \quad (71)$$

$$\dot{u}_0 = \frac{1}{2\Delta t} (u_1 - u_{-1}). \quad (72)$$

Slednjo enačbo delimo z izrazom $\frac{2}{\Delta t}$ in enačbi odštejemo, dobimo sledeč izraz, ki ga še malo preuredimo, da dobimo še rešitev za pomik pri času $t = -\Delta t$;

$$\ddot{u}_0 - \frac{2}{\Delta t} \dot{u}_0 = \frac{1}{\Delta t^2} u_1 - \frac{2}{\Delta t^2} u_0 + \frac{1}{\Delta t^2} u_{-1} - \frac{1}{\Delta t^2} u_1 + \frac{1}{\Delta t^2} u_{-1}, \quad (73)$$

$$\ddot{u}_0 - \frac{2}{\Delta t} \dot{u}_0 = \frac{2}{\Delta t^2} u_{-1} - \frac{2}{\Delta t^2} u_0 = \frac{2}{\Delta t^2} (u_{-1} - u_0), \quad (74)$$

$$u_{-1} = \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0 - \Delta t \dot{u}_0 + u_0. \quad (75)$$

Vrednosti u_0 in \dot{u}_0 sta običajno podani v okviru začetnih pogojev, pospešek \ddot{u}_0 (pospešek pri času $t = 0$) pa dobimo s pomočjo enačbe gibanja. Glede stabilnosti velja enak pogoj kot pri sistemu MDOF.

2.3.1.1 Algoritem za reševanje enačbe gibanja po metodi simetričnih diferenc:

Predstavljen je algoritem za model SDOF, ki je bil vgrajen v programski skripto `racuni_CDM.py`, ki je sestavni del spletne aplikacije za račun dinamičnega odziva modela SDOF. Numerično rešitev enačbe gibanja modela SDOF po metodi končni razlik se izvede po naslednjih korakih:

- določitev togosti, mase in deleža kritičnega dušenja konstrukcije,
- izračun koeficienta dušenja in lastne frekvence (En. (11) in En. (12)),
- določitev začetnih pogojev (začetni pomik in začetna hitrost),
- izračun vektorja začetnega pospeška iz enačbe gibanja (En. (58)),
- izbira časovnega koraka za integracijo,
- izračun pomika za korak $i = -1$ (En. (75)),
- nastavimo $i = 0$
- izračun za i -ti korak:

1. izračun nadomestne togosti (En. (68)) in nadomestne sile (En. (69))
 2. izračun pomika za $t = t_i + \Delta t$ (En. (70))
 3. Izračun hitrosti (En. (61)) in pospeška (En. (62)) za i -ti korak
 4. $i = i + 1$
- Ponavljalj korake od 1 do 4 do konca opazovanega časa.

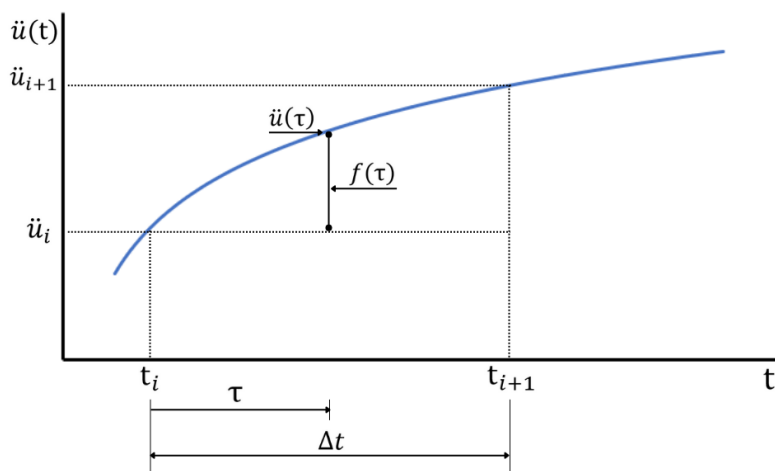
2.3.2 Newmarkova- β metoda

Newmarkovo- β metodo za numerično integracijo diferencialnih enačb drugega reda (Newmark, N. M., 1959), ki se uporablja predvsem za račun dinamičnega odziva konstrukcij, je leta 1959 razvil Nathan Martimore Newmark. Newmark velja za enega od prvih, ki se je ukvarjal s potresnim inženirstvom, njegov prispevek k tej veji znanosti je zelo pomemben, za svoje delo pa je bil večkrat tudi nagrajen.

Newmarkova- β metoda je implicitna metoda, ker se pomiki izračunajo posredno na osnovi predpostavljene funkcije pospeška v obravnavanem časovnem intervalu. Newmark je predpostavil, da se pospešek znotraj časovnega intervala izraža sledeče:

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + f(\tau)(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i), \quad (76)$$

kjer je $f(\tau)$ poljubna funkcija časa (predstavljena z grafom na Sliki 3), τ pa je definiran kot $\tau = t - t_i$.



Slika 3: Pospešek v odvisnosti od časa kot funkcija $f(\tau)$ za izbran časovni korak Δt .

Ker je pospešek odvod hitrosti po času, integracija pa predstavlja obratno matematično operacijo, lahko hitrosti izračunamo kot integral diferenciala hitrosti, ki ga izrazimo kot produkt pospeška in diferenciala časa:

$$\int_0^\tau d\dot{u}(\tau) = \int_0^\tau (\ddot{u}_i + f(\tau)(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)) d\tau. \quad (77)$$

Po integriranju, En. (77) dobi sledečo obliko:

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \int_0^\tau f(\tau) d\tau. \quad (78)$$

Če upoštevamo τ na koncu časovnega intervala $\tau = \Delta t$, dobimo hitrost na koncu intervala in enakovredno preurejeno enačbo:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t \ddot{u}_i + \gamma \Delta t (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i), \quad (79)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{u}_i + \gamma \Delta t \ddot{u}_{i+1}, \quad (80)$$

kjer je γ definiran s sledečo enačbo:

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau. \quad (81)$$

Ker je hitrost odvod pomika po času, lahko analogno z izračunom hitrosti, tudi pomik na koncu intervala, saj je hitrost odvod pomika. Pomik izračunamo kot integral diferenciala pomike, ki ga izrazimo kot produkt hitrosti in diferenciala časa:

$$\int_0^{\tau} du(\tau) = \int_0^{\tau} (\dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \int_0^{\tau} (f(\tau) d\tau) d\tau, \quad (82)$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \ddot{u}_i \frac{\tau^2}{2} + (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \int_0^{\tau} \left(\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau \right) d\tau. \quad (83)$$

Če upoštevamo τ na koncu intervala $\tau = \Delta t$, dobimo pomik na koncu intervala in enakovredno preurejeno enačbo;

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i + \beta \Delta t^2 (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i), \quad (84)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_i + \beta \ddot{u}_{i+1} \right), \quad (85)$$

kjer je β definiran sledeče:

$$\beta = \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau d\tau. \quad (86)$$

Predstavljeni rešitvi za pomik in hitrost veljata tudi v vektorski obliki. Zato lahko definiramo vektorja hitrosti in pomikov s sledečimi izrazi:

$$\{\dot{u}\}_{i+1} = \{\dot{u}\}_i + \Delta t (1 - \gamma) \{\ddot{u}\}_i + \gamma \Delta t \{\ddot{u}\}_{i+1}, \quad (87)$$

$$\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \Delta t \{\dot{u}\}_i + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}\}_i + \beta \{\ddot{u}\}_{i+1} \right). \quad (88)$$

Parametra γ in β izberemo glede na iskano rešitev.

Da bi izračunali pomike, iz En. (88) izrazimo vektor pospeškov, tako da dobimo sledeč izraz:

$$\{\ddot{u}\}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\{u\}_{i+1} - \{u\}_i - \Delta t \{\dot{u}\}_i) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_i \quad (89)$$

in ga vstavimo v enačbo za hitrosti (En.(90)) ter po preureditvi dobimo:

$$\{\dot{u}\}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\{u\}_{i+1} - \{u\}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \{\dot{u}\}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \{\ddot{u}\}_i. \quad (90)$$

Edina neznanka v En. (89) in En. (90) je vektor pomikov, saj so vektorji ostalih kinematičnih količin znani iz prejšnjega časovnega intervala. Zato enačbi za vektor pospeškov $\{\ddot{u}\}_{i+1}$ in vektor hitrosti $\{\dot{u}\}_{i+1}$ vstavimo v enačbo gibanja za čas $t = t_i + \Delta t = t_{i+1} = \Delta t(i + 1)$, ki jo preuredimo v obliko ekvivalentnega statičnega problema:

$$[M]\{\ddot{u}\}_{i+1} + [C]\{\dot{u}\}_{i+1} + [K]\{u\}_{i+1} = -[M]\{1\}\ddot{u}_g(t_{i+1}), \quad (91)$$

$$[\hat{K}_N]\{u\}_{i+1} = \{\hat{F}_N\}_{i+1}, \quad (92)$$

kjer $[\hat{K}_N]$ predstavlja nadomestno togostno matriko in $\{\hat{F}\}$ nadomestni vektor obtežbe, ki se izražata kot:

$$[\hat{K}_N] = [K] + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] + \frac{\gamma}{2\beta} [C] \text{ in} \quad (93)$$

$$\begin{aligned}\{F_N\}_{i+1} = & -[M]\{1\}\ddot{u}_g(t_{i+1}) + [M]\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{u\}_i + \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}\}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{u}\}_i\right) \\ & + [C]\left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u\}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\{\dot{u}\}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\{\ddot{u}\}_i\right).\end{aligned}\quad (94)$$

Vektor pomikov na koncu intervala torej znaša:

$$\{u\}_{i+1} = [\hat{K}_N]^{-1}\{\hat{F}_N\}_{i+1}, \quad (95)$$

vektor hitrosti in pospeška pa izračunamo po En. (89) in En. (90).

Newmarkova metoda ima poleg časovnega intervala še dva parametra γ in β , ki ju je treba primerno izbrati. Običajno se parametra izbereta tako, da je funkcija predpostavljenega pospeška znotraj časovnega intervala konstantna ali pa linearna, kar pomeni, da z izbiro parametrov, lahko dobimo tako metod s konstantnim kot tudi metodo z linearnim pospeškom. V nadaljevanju podajamo še izpeljavo vrednosti parametra γ in β za omenjeni metodi.

Pri metodi s konstantnimi pospeški izhajamo iz predpostavke, da je pospešek znotraj intervala konstanten. To predpostavko je možno upoštevati pri Newmarkovi metodi, in sicer takole:

$$f(\tau) = \frac{1}{2}, \quad (96)$$

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\Delta t} d\tau = \frac{1}{2}, \quad (97)$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} \left(\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau \right) d\tau = \frac{1}{2\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} \left(\int_0^{\tau} d\tau \right) d\tau = \frac{1}{2\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} \tau d\tau = \frac{1}{4}. \quad (98)$$

Podobno pa je možno parametra Newmarkove metode izbrati tako, da je funkcija pospeška v časovnem intervalu linearna, torej velja:

$$f(\tau) = \frac{\tau}{\Delta t}, \quad (99)$$

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} \tau d\tau = \frac{1}{2}, \quad (100)$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} \left(\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau \right) d\tau = \frac{1}{\Delta t^3} \int_0^{\Delta t} \left(\int_0^{\tau} \tau d\tau \right) d\tau = \frac{1}{2\Delta t^3} \int_0^{\Delta t} \tau^2 d\tau = \frac{1}{6}. \quad (101)$$

Newmarkova metoda je torej implicitna metoda, za katero velja, da je stabilna, če velja (Villaverde 2009):

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (102)$$

in

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2. \quad (103)$$

Ob tem se je treba zavedati, da pri izbiri $\gamma > \frac{1}{2}$ pride do umetnega dušenja, ki je večje, tem večji je izbran integracijski korak. Zato je parameter gama najpogosteje uporabljen z vrednostjo $\gamma = \frac{1}{2}$ (Villaverde, 2009).

Prikazana rešitev velja za model MDOF, ki pa jo lahko uporabimo tudi za primer ko obravnavamo model SDOF. Osnovne enačbe iz začetka tega poglavja (En. (76) do En. (86)) ostanejo enake kot za sistem

MDOF. Enačbe za pomik, pospešek in hitrost pa preidejo v enostavnejšo obliko, zapisano s skalarji namesto matrikami:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{u}_i + \gamma\Delta t\ddot{u}_{i+1}, \quad (104)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\dot{u}_i + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_i + \beta \ddot{u}_{i+1} \right). \quad (105)$$

En.(104) in En.(105) preuredimo tako, da izrazimo pospešek in hitrost s pomikom na koncu časovnega intervala:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (u_{i+1} - u_i - \Delta t\dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i), \quad (106)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (u_{i+1} - u_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{u}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{u}_i. \quad (107)$$

Sedaj lahko zapišemo enačbo gibanja za čas $t = t_i + \Delta t = t_{i+1} = \Delta t(i + 1)$ in z upoštevanjem En. (106) in En. (107) preuredimo v enačbo za ekvivalentno statično analizo:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = f_{i+1}, \quad (108)$$

$$K_{i+1}u_{i+1} = F_{i+1}. \quad (109)$$

Kjer K_{i+1} predstavlja nadomestno togost, F_{i+1} pa nadomestno silo izraženi kot:

$$K_{i+1} = k + \frac{1}{\beta\Delta t^2}m + \frac{\gamma}{2\beta}c, \quad (110)$$

$$F_{i+1} = f_{i+1} + m \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}u_i + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i \right) + c \left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t}u_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{u}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{u}_i \right). \quad (111)$$

Podobno kot za model MDOF lahko tudi pri reševanju enačbe gibanja modela SDOF, Newmarkovo metodo udejanjimo kot metodo s konstantnim pospeškom ali metodo z linearnim pospeškom. Pri metodi s konstantnim pospeškom predpostavimo, da je funkcija pospeška v posameznem časovnem intervalu konstantna. Za metodo s konstantnimi pospeški moramo uporabiti naslednje vrednosti Newmarkovih parametrov:

$$\gamma = \frac{1}{2} \text{ in } \beta = \frac{1}{4}. \quad (112)$$

Da bi dobili metodo z linearnim pospeškom v posameznem časovnem intervalu, pa dobimo parametra vrednosti:

$$\gamma = \frac{1}{2} \text{ in } \beta = \frac{1}{6}. \quad (113)$$

2.3.2.1 Algoritem za reševanje

Predstavljen je algoritem za model SDOF, ki je bil vgrajen v programsko skripto `racuni_Newmark.py`, ki je sestavni del spletne aplikacije za račun dinamičnega odziva modela SDOF. Numerično rešitev enačbe gibanja modela SDOF po Newmarkovi- β metodi poteka po sledečih korakih:

- določitev togosti, mase in deleža kritičnega dušenja konstrukcije,
- izračun koeficienta dušenja in lastne frekvence (En. (11) in En. (12)),
- določitev začetnih pogojev (začetni pomik in začetna hitrost),
- izračun začetnega pomika iz enačbe gibanja,
- izbira časovnega koraka za integracijo, izbira parametrov γ in β ,
- nastavimo $i = 0$,

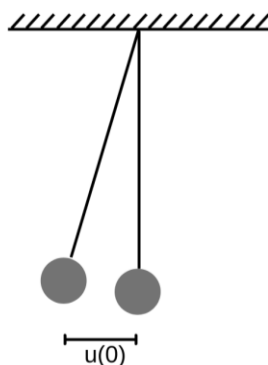
-
- izračun za i -ti korak:
 1. izračun nadomestne togosti (En. (110)) in nadomestne sile (En. (111)),
 2. izračun pomika za $t = t_i + \Delta t$ (En. (109)),
 3. Izračun hitrosti (En. (106)) in pospeška (En. (107)) za $t = t_i + \Delta t$,
 4. $i = i + 1$,
 - ponavljalj korake od 1 do 3 do konca opazovanega časa.

3 PREDSTAVITEV OBRAVNAVANIH PROBLEMOV

V tem poglavju na kratko predstavimo osnovne probleme dinamičnega odziva modela SDOF, kot smo jih obravnavali pri predmetu Osnove potresnega inženirstva. Problemi so predstavljeni opisno, vendar jih je možno za model SDOF bolj podrobno preučevati z uporabo spletne aplikacije.

3.1 Lastno nihanje

Lastno nihanje je pojav, ko telo niha brez delovanja zunanje obtežbe, pri čemer je nihanje posledica vsiljenega začetnega pomika in/ali neke začetne hitrosti (t. i. začetni pogoji). Za praktičen primer si najlažje predstavljamo nihalo (Slika 4), ki ga izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo, da niha. V primeru, da pri tem ne bi bilo dušenja (oziroma ga ne bi upoštevali), kar je zgolj teoretično možno, bi pojav imenovali lastno nedušeno nihanje. V tem primeru bi sistem nihalo okoli ravnovesne lege neskončno dolgo, amplituda pa bi se ohranjala. Bolj realen je primer dušenega nihanja, kjer se amplituda nihanja iz nihaja v nihaj zmanjšuje. Pri tem se maksimalna amplituda zmanjšuje skladno z eksponentno funkcijo z negativnim eksponentom. Z opazovanjem lastnega nihanja lahko določimo lastni nihajni čas ter posledično lastno frekvenco. Z opazovanjem spreminjanja amplitude pomika iz nihaja v nihaj pa je možno določiti tudi vpliv dušenja na nihanje oziroma velikost dušenja.

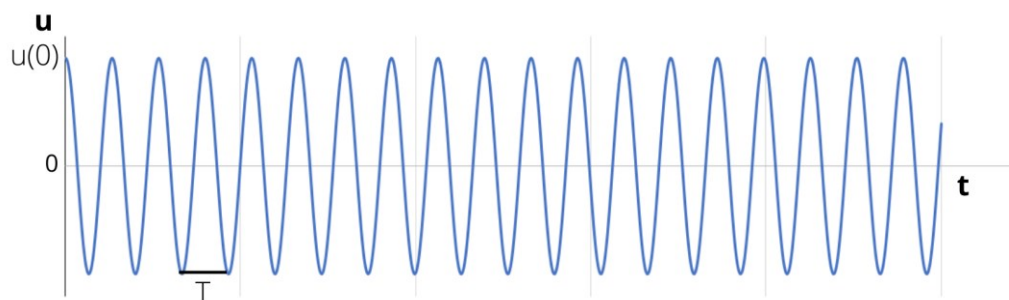


Slika 4: Shematičen prikaz nihala z začetnim pomikom.

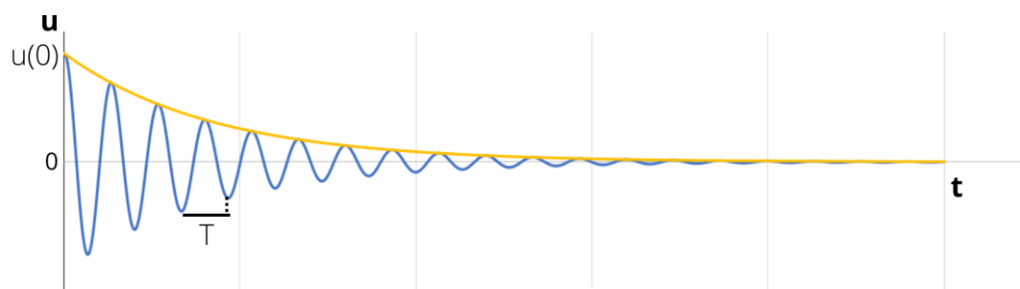
Lastni nihajni čas je pomemben parameter modela SDOF, saj ima pomemben vpliv na odziv konstrukcije predvsem v primeru, če se pri harmonični obtežbi deloma pa tudi pri potresni obtežbi pojavi resonanca. V primeru resonance se pomiki drastično povečajo in lahko pride do poškodb ali porušitve. Zato se izogibamo situaciji, da bi bili lastna frekvenca obtežbe in konstrukcije enaki.

Pri numerični integraciji v primeru reševanja problema lastnega nihanja nastavimo npr. začetni pomik na neničelno vrednost, vektor zunanje obtežbe pa ima v vseh časovnih intervalih vrednost nič. Analitična rešitev enačbe lastnega nihanja je predstavljena v prejšnjem poglavju. V tem poglavju pa je grafično prikazana funkcija pomika v odvisnosti od časa (Slika 5), ko je dušenje enako nič, z označenim začetnim pomikom $u(0)$, in lastnim nihajnim časom T , na drugem grafu (Slika 6), pa je prikaz, ko je delež kritičnega dušenja enak 0,05 (kot predvideva standard Evrokod 8). Z rumeno črto je označena še padajoča eksponentna funkcija, ki ji sledi amplituda pomikov:

$$e^{-\xi\omega t}. \quad (114)$$



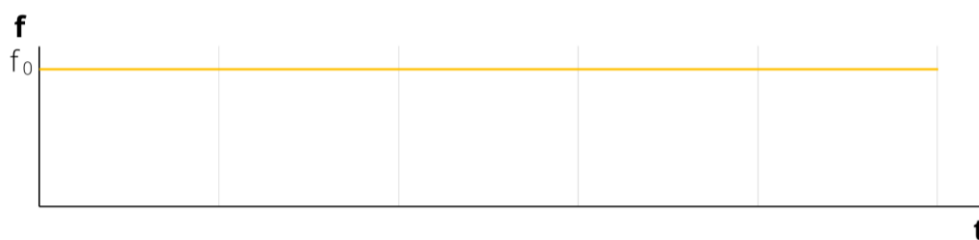
Slika 5: Pomik v odvisnosti od časa za nedušeno lastno nihanje.



Slika 6: Pomik v odvisnosti od časa za dušeno lastno nihanje in primerjava z eksponentno funkcijo maksimalnih amplitud pomikov.

3.2 Konstantna obtežba brez in z upoštevanjem hitrosti naraščanja obtežbe

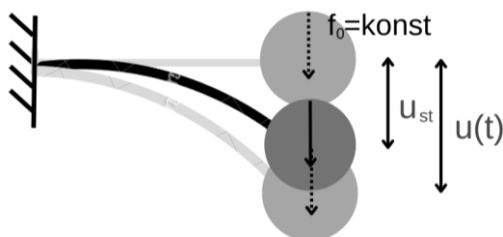
Za približno obravnavo problema dinamičnega odziva modela SDOF pri konstantni obtežbi predpostavimo, da obtežba hipno naraste, potem pa je konstantna, kot je prikazano na Sliki 7. Torej pri času $t=0$ obtežba naraste na maksimalno silo f_0 .



Slika 7: Konstantna obtežba v odvisnosti od časa.

Konstantna obtežba povzroči, da sistem zaniha okoli nove ravnovesne lege. To si najlažje predstavljamo na primeru horizontalne konzole (Slika 8). Nova ravnovesna lega (statična lega) je odvisna od velikosti obtežbe in togosti konstrukcije. Pravimo ji tudi statični pomik, izračunamo ga kot:

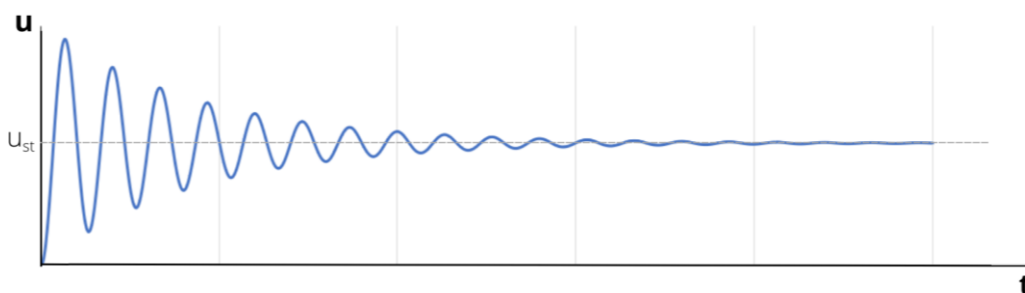
$$u_{st} = \frac{F}{k} = \frac{f_0}{k}. \quad (115)$$



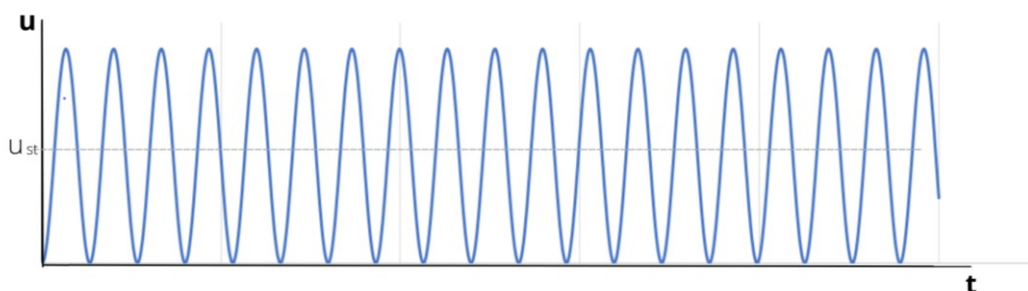
Slika 8: Ponazoritev statičnega in dinamičnega pomika na primeru horizontalne konzole.

V primeru dušenega nihanja bi torej konstrukcija s čedalje manjšo amplitudo nihala okoli statične ravnovesne lege in se, ko bi se nihanje udušilo v tej legi, umirila. V primeru, da dušenja ne upoštevamo, bi nihala neskončno dolgo z amplitudo, ki je enaka dvokratniku statičnega pomika.

Za primer dušenega in nedušenega nihanja sta na Sliki 9 in 10 predstavljena pomika v odvisnosti od časa. Pri dušenem nihanju upoštevamo vrednosti dušenja 0,05.



Slika 9: Pomik v odvisnosti od časa pri konstantni obtežbi z upoštevanjem 5 % dušenja.



Slika 10: Pomika v odvisnosti od časa pri konstanti obtežbi in za primer nedušenega nihanja.

V prikazanih primerih nihanja modela SDOF smo torej upoštevali, da je nalaganje sile na konstrukcijo hipno. Ker v realnih primerih pogosto ni tako, lahko pri analizi upoštevamo tudi čas nalaganja obtežbe. Pri tem se običajno predpostavi, da zunanja obtežba narašča linearno, za čas daljši od t_1 pa je konstantna, kot je prikazano na Sliki 11. Tudi za ta primer obtežbe se konstrukcija obnaša dokaj podobno kot pri hipni obremenitvi, le da je razmerje med amplitudo in statičnim pomikom v tem primeru manjše.



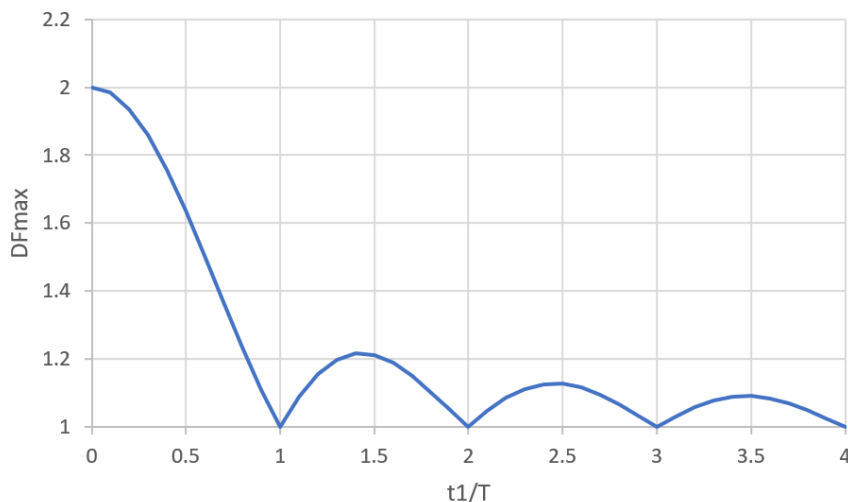
Slika 11: Obtežba v odvisnosti od časa za konstantno obtežbo z upoštevanjem hitrosti naraščanja obtežbe.

Za boljše razumevanje dinamičnih vplivov vpeljemo pojem dinamičnega faktorja (DFmax), za katerega velja:

$$DF_{max} = \frac{u_{max}}{u_{st}}. \quad (116)$$

kjer je u_{max} maksimalna vrednost absolutnih vrednosti pomikov iz dinamične analize. Intuitivno se nam zdi, da dinamični faktor pri počasnejšem nalaganju obtežbe pada. Največjo vrednost ima ravno pri hipnem nalaganju, kjer lahko iz prejšnjih grafov razberemo, da njegova vrednost znaša 2. Do posebnega pojava pride, če konstrukcijo obremenimo v času, ki je večkratnik njenega lastnega nihajnega časa. Takrat ima dinamični faktor vrednost 1, dinamični pomik je enak statičnemu, konstrukcija pa ne niha.

Da bi dobili širši vpogled v dinamični odziv modela SDOF pri konstantni obtežbi z upoštevanjem vpliva hitrosti naraščanja obtežbe, prikazujemo še dinamični faktor v odvisnosti od razmerja med časom nalaganja (označenem s t_1) obtežbe in lastnim nihajnim časom (Slika 12).



Slika 12: Dinamični faktor v odvisnosti od razmerja med časom nalaganja t_1 in nihajnim časom T .

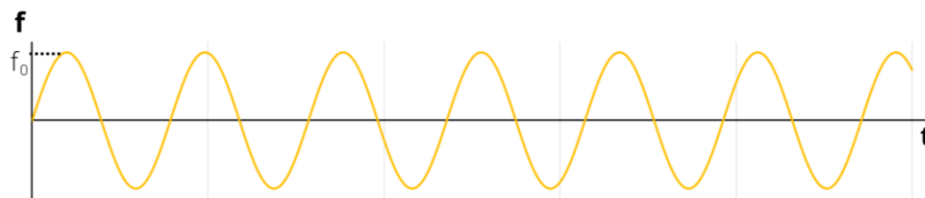
3.3 Harmonična obtežba

Pod harmonični obtežbo razumemo obtežbo, ki se spreminja s pozitivne na negativno vrednost, pri čemer je oblika zunanje obtežbe enaka za pozitiven in negativen del obtežbe. Najbolj osnovni harmonični obtežbi se opišeta s funkcijama sinusa (Slika 13) ali kosinus:

$$f(t) = f_0 \sin(\Omega t), \quad (117)$$

$$f(t) = f_0 \cos(\Omega t), \quad (118)$$

kjer je Ω krožno frekvenco vzbujanja modela SDOF.



Slika 13: Harmonična obtežba v smislu sinusne obtežbe.

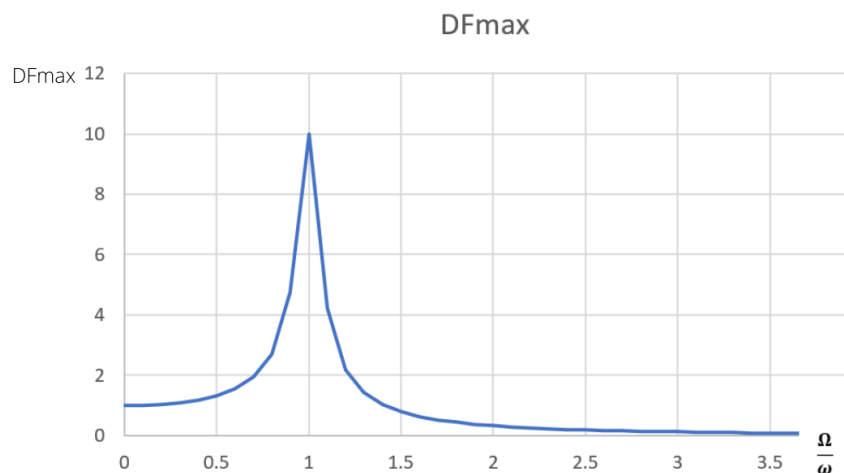
Harmonično obtežbo lahko povzročajo gradbeni stroji ali pa električni generatorji, ki imajo rotor, ki se vrti s točno določeno frekvenco. Če se zgodi, da se ta frekvenca ujame z lastno frekvenco konstrukcije, pride ta v resonanco. To pomeni, da amplituda (pomiki) začnejo naraščati. Ta pojav si lahko razložimo tudi z uporabo formule za dinamični faktor v primeru harmonične obtežbe (formula velja le za primer šibkega dušenja):

$$DF_{max} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|}. \quad (119)$$

En. (119) ne velja za primer $\omega = \Omega$, saj dobimo v imenovalcu vrednost 0. Da bi rešili tudi ta problem, je treba enačbo za maksimalni dinamični faktor izpeljati za primer dušenega nihanja, ki se izraža sledeče:

$$DF_{max} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}. \quad (120)$$

Za boljše razumevanje maksimalnega dinamičnega faktorja v primeru dušenega nihanja in harmonične obtežbe smo En. (120) na Sliki 14 ponazorili grafično. Izkaže se, da so kritične frekvence vzbujanja v okolici lastne frekvence konstrukcije, ki jo izračunamo na osnovi analize lastnega nihanja.



Slika 14: Dinamični faktor v odvisnosti od razmerja med vzbujevalno in lastno krožno frekvenco pri 5 % kritičnem dušenju.

3.4 Udarna obtežba

Udarna obtežba je kratkotrajna obtežba, kjer je sistem izpostavljen le posameznemu impulzu. Primer takšne obtežbe je trk vozila. Za poenostavitev analize lahko predpostavimo trikotno (Slika 15) ali pravokotno obliko udarne obtežbe (Slika 16). Trikotna je lahko simetrična (Slika 15) ali asimetrična. Simetrična doseže vrh ravno na polovici med začetnim in končnim časom trajanja. Za takšni vrsti obtežbe je možno izpeljati analitične rešitve. Udarna obtežba lahko seveda v splošnem zavzame poljubno obliko (Slika 17), vendar je v takih primerih treba uporabiti numerične metode reševanja enačbe gibanja.



Slika 15: Obtežba v odvisnosti od časa za simetrično trikotno udarno obtežbo.



Slika 16: Obtežba v odvisnosti od časa za pravokotno udarno obtežbo.

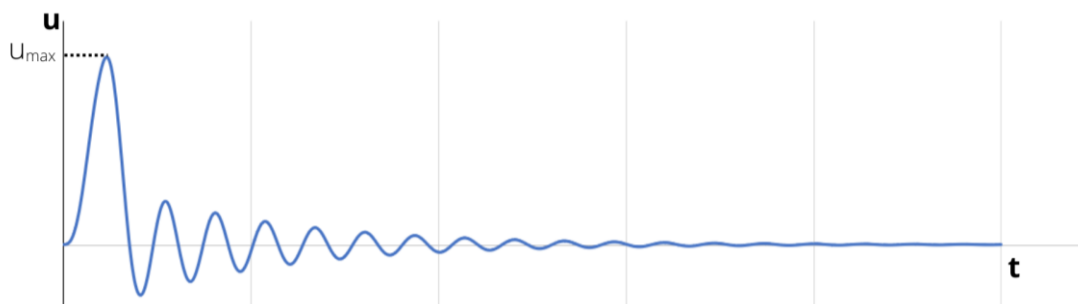


Slika 17: Obtežba v odvisnosti od časa za poljubno udarno obtežbo.

V okviru analize odziva konstrukcije na udarno obtežbo je merodajen predvsem pomik v prvem nihaju (za primer glej Sliko 18). Če je trajanje obtežbe zelo kratko, v tem času dušenje nima bistvenega vpliva in ga lahko celo zanemarimo. Ob tej predpostavki je možno izpeljati približno formulo za dinamični faktor pri udarni obtežbi in poljubni funkciji udarne obtežbe:

$$DF_{max} = \frac{2\pi}{f_{max}T} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \quad (121)$$

Iz zgornje enačbe je možno sklepati, da je odziv konstrukcije na udarno obtežbo odvisen od velikosti obtežbe, njenega trajanja ter nihajnega časa sistema, zato se lahko zgodi, da pri velikem nihajnem času in zelo kratkotrajni obtežbi vrednost dinamičnega faktorja znaša manj kot 1.



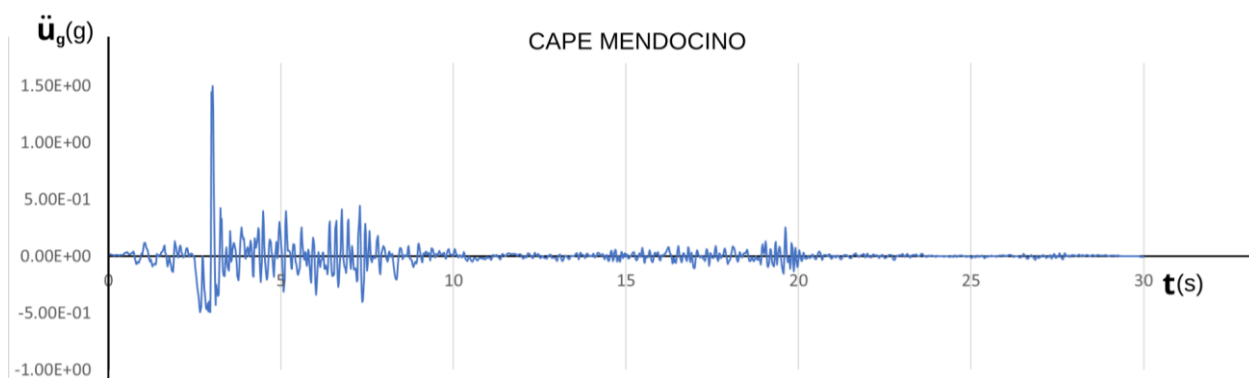
Slika 18: Pomik v odvisnosti od časa za simetrično trikotno udarno obtežbo iz Slike 15.

3.5 Potresna obtežba

Potresna obtežba ne deluje neposredno na maso konstrukcije, temveč povzroči gibanje konstrukcije prek gibanja oziroma tresenja tal. Tla se lahko tresejo zaradi prelomov v zemeljski skorji, ki so posledica premikanja tektonskih plošč, izbruhov vulkanov, plazov, zemeljskih udorov v kraškem svetu ali eksplozij. Najbolj pogosti so potresi zaradi premikanja tektonskih plošč. Prelomi, ki ob tem nastanejo, pa so lahko različnih oblik (normalni, reverzni, desnozmčni in levozmčni). Pri tem nastanejo globinski (P in S valovi) in površinski (R in L) valovi. Slednji povzročijo gibanje konstrukcije.

Za analizo gradbenih konstrukcij pri potresni obtežbi je običajno smiselno, da analiziramo le odziv konstrukcije relativno glede na tla. Enačbo gibanja zato zapišemo z relativnimi kinematičnimi količinami, kot je bilo to predstavljeno v prvem poglavju (En. 8).

Iz En. 8 sledi, da se zunanja obtežba pri potresni obtežbi izraža kot produkt mase in negativne vrednosti pospeška tal, ki mu rečemo akceleroگرام (glej npr. Sliko 19). Pospeške tal merimo z akceleroграфi na merilnih postajah. V splošnem dobimo zapise pospeškov tal za tri smeri (dve horizontalni in vertikalno). Nato lahko odziv konstrukcije obravnavamo s pomočjo numerične analize kot vse predhodno predstavljene probleme. Splošne analitične rešitve za primer potresne obtežbe ni. Če nas zanima potresni odziv modela v odvisnosti od časa, je treba potresno analizo zato izvajati s pomočjo numeričnih metod.



Slika 19: Primer akcelerograma potresa Cape Mendocino (ZDA, 25. 4. 1992, Mw=7,01, reverzni prelom).

V zadnjem času se je število merilnih postaj gibanja tal precej povečalo. Zato je na voljo precej zapisov gibanja tal in baz akceleroگرامov, kar omogoča preučevanje vpliva različnih parametrov, ki vplivajo na potresno obtežbo in s tem povezan odziv konstrukcije. Smiselno je preučevati, kakšen vpliv ima

magnituda, tip preloma, tip tal, oddaljenostjo preloma od merilne postaje ali drugi fenomeni potresov na potresni odziv modela SDOF.

V diplomski nalogi smo se posvetili predvsem preučevanju različnih numeričnih rešitev na potresni odziv modela SDOF, čeprav se ta vpliv lahko preučuje le v smislu dinamičnega odziva modela ne pa v smislu spektrov odziva, ki podajajo vpogled na potresni odziv množice modelov SDOF. Ker spletna aplikacija vključuje akceleroگرامe za različne tipe tal, je možno preučevati tudi vpliv tal na potresni odziv modela SDOF, kar je bolj podrobno razloženo v naslednjem podpoglavju.

3.5.1 Preučevanje tipa tal

Odziv konstrukcije na potresno obtežbo je v določeni meri odvisen tudi od tipa tal. Standard Evrokod 8 obravnava pet različnih tipov tal (označenih kot A, B, C, D in E). V izbrano kategorijo se tla razvrščajo predvsem glede povprečno vrednost hitrosti strižnega valovanja v zgornjih 30 m profila tal, $v_{s,30}$. Hitrosti strižnega valovanja tal na profilu tal se lahko določi s porušnimi ali neporušnimi metodami, izračuna pa se po sledeči formuli (SIST EN 1998-1:2005 Evrokod 8 – Projektiranje potresnoodpornih konstrukcij):

$$v_{s,30} = \frac{30}{\sum_{i=1}^N \frac{h_i}{v_i}}. \quad (122)$$

kjer h_i in v_i označujeta debelino in hitrost strižnega valovanja i -te plasti od skupno N plasti zgornjih 30 m tal. Bolj kot so toga tla, večja je hitrost $v_{s,30}$. Tip tal se klasificira kot tip tal A, če $v_{s,30} > 800 \frac{m}{s}$. Tla tipa D pa veljajo kot zelo podajna tla, kjer je $v_{s,30} < 180 \frac{m}{s}$.

Klasifikacija tipa tal v kategorije od A do D je odvisna od $v_{s,30}$. Za bolj toga tla je vrednost $v_{s,30}$ večja. Torej, bolj kot so toga tla (skalnata), hitrejšje je potovanje potresnih valov. Ob prehodu iz enega v drug tip tal (plastovitost) lahko pride do povečanja amplitude potresnih valov. Na obnašanje valovanja vpliva tudi debelina posameznih plasti. Poškodbe na stavbi pa so odvisne od oblike, velikosti in hitrosti valov, ki pridejo na površje. Vpliv tipa tal na pomike in posledično predvidene poškodbe lahko opazujemo tako, da izberemo zapise za pospeške tal s podobnimi vrednostmi $v_{s,30}$ in podobnimi magnitudami in oddaljenosti lokacije od epicentra potresa in nato preučujemo, kakšni so vplivi na konstrukcije.

4 PREDSTAVITEV SPLETNE APLIKACIJE

4.1 Namen in uporabljene metode

Namen spletne aplikacije je analiza odziva konstrukcij na različne vrste dinamične obtežbe s pomočjo metod dinamične analize in prikaz rezultatov v obliki grafov. Aplikacija ima predvsem pedagoško vrednost, saj se študenti s podobno nalogo srečamo v okviru predmeta Osnove potresnega inženirstva, pri čemer pa nimamo orodja, s katerim bi na enostaven način preučevali dinamičen odziv konstrukcij. Aplikacija je zasnovana prijazno do uporabnika, reševanje problemov dinamičnega odziva konstrukcije pa približa študentom, ker predstavlja preprosto orodje za izračun in prikaz rezultatov v obliki grafov kinematičnih količin v odvisnosti od časa (tj. pomika, hitrosti, pospeška), grafa zunanje obtežbe in grafov ostalih sil, ki nastopajo v modelu (vztrajnostna sila, sila dušenja in notranja sila).

Programske skripte, ki izvajajo vse analize in izračune, so napisane v programskem jeziku Python. Pri tem so za numerično reševanje implementirani algoritmi, ki so predstavljeni v drugem poglavju diplomske naloge, analitične rešitve pa so implementirane s pomočjo formul iz tretjega poglavja. Spletna aplikacija je razvita s pomočjo jezika HTML in nabora orodij Bootstrap za oblikovanje izgleda s pomočjo jezika CSS. Povezava med spletno stranjo in programskimi skriptami za račun dinamičnega odziva modela SDOF pa je narejena s pomočjo programskega jezika PHP in skriptnega jezika JavaScript. V začetni fazi razvoja spletne aplikacije smo za namen idejne zasnove uporabniškega vmesnika uporabili program MS PowerPoint, za oblikovanje slik pa še program Canva.

Uporabniški vmesnik (Slika 20) je zasnovan tako, da je na levi strani izbirni del, ki omogoča prehajanje med zavihki aplikacije, s pritiskom na modro puščico (v levem zgornjem kotu ob logotipu) pa se lahko izbirni del uporabniškega vmesnika tudi zapre in s tem omogoči razširitev polj za vnašanje podatkov. Za pripravo primera mora uporabnik izbrati zavihek za izračun in vnesti podatke o konstrukciji (maso, togost in delež kritičnega dušenja) v izbrana polja, kot je to prikazano na Sliki 20. Na osnovi teh podatkov aplikacija izračuna in izpiše lastni nihajni čas, koeficient dušenja in lastno frekvenco.

Sledi razdelek za vnos podatkov o obtežbi. Na voljo so naslednje vrste analize oz. obtežbe: lastno nihanje, konstantna obtežba z in brez upoštevanja hitrosti naraščanja obtežbe, različne oblike udarne obtežbe, harmonična obtežba in potresna obtežba. Glede na izbran problem se odprejo dodatne možnosti za vnos vhodnih podatkov o obtežbi in časa opazovanja, s čimer se določi tudi čas za izris grafov.

Za analizo lastnega nihanja se ne podaja zunanje obtežbe, temveč začetni pomik in začetna hitrost. Pri harmonični obtežbi uporabnik vnese jakost obtežbe (največjo vrednost obtežbe) in krožno frekvenco vzbujanja. Z upoštevanjem lastne krožne frekvence konstrukcije, ki jo izračuna program pred tem, lahko uporabnik numerično preučuje tudi pojav resonance. Konstantna obtežba se definira z jakostjo obtežbe in časom nalaganja. Z upoštevanjem lastnega nihajnega časa konstrukcije lahko uporabnik poišče primere, ko znaša dinamični faktor 1. Pri izbiri udarne obtežbe se pojavijo naslednja polja:

- tipa udarne obtežbe (trikotna ali pravokotna udarna obtežba),
- začetek in konec trajanja impulza,
- za trikotni tip obtežbe pa še čas, ko obtežba doseže maksimalno vrednost.

Slika 20: Uporabniški vmesnik spletne aplikacije »Response!« s polji za vnos in prikaz podatkov.

V primeru potresne obtežbe uporabnik izbira med naborom akceleroگرامov, ki so bili izbrani z namenom preučevanja vpliva tipa tal na potresni odziv konstrukcije. Gre za zapise pospeškov tal pri potresih z momentno magnitudo med 5,9 in 6,1, a različnimi vrednostmi $v_{s,30}$. Tako lahko uporabnik na podlagi poznavanja teorije, ki je predstavljena v predstavitvi problemov, analizira odziv konstrukcije na različnih tipih tal. S pomočjo statistične obdelave rezultatov in opazovanja podobnosti v odzivih lahko prepozna ponavljajoče karakteristike odziva konstrukcije glede na klasifikacijo tal. Akceleroگرام se izbere s spustnega seznama, ki vsebuje, poleg imen potresov, še ključne podatke o posameznih potresih, in sicer v večini primerov momentno magnitudo, tip preloma, vrednost $v_{s,30}$, razdalja med lokacijo postaje in epicentra ter razdalja od lokacije postaje do hipocentra. Uporabnik izbere še čas opazovanja ter komponento gibanja tal, ki ga zanima (izbira med horizontalnima H1, H2 in vertikalno V). Izbira vhodnih podatkov za analizo potresne obtežbe je predstavljena na Sliki 21.

Slika 21: Prikaz polj za pripravo podatkov o potresni obtežbi.

Za izračun je treba izbrati še vrsto analize. Uporabnik izbira med metodo simetričnih diferenc in Newmarkovo metodo. Pri obeh metodah uporabnik določi časovni korak, pri Newmarkovi metodi pa še parametra γ in β (Slika 22), pri čemer se lahko z ustrezno izbiro teh parametrov izvede analiza z metodo s konstantnimi oziroma linearnimi pospeški znotraj enega časovnega koraka ali pa celo metoda simetričnih diferenc. Poleg tega se rešitev izračuna analitično, če ta obstaja. Ob kliku na gumb za izračun se podatki in rezultati analize shranijo v mapo v naslednjem zavihku.

Ker izhajamo iz predpostavke, da vsi uporabniki nimajo enakega poznavanja oziroma predznanja teorije s področja dinamike, so nekateri pojmi, uporabljeni ob poljih za vnos tudi razloženi. Razlaga se pojavi, če uporabnik zadrži miško na vnosnem polju. To mu pomaga pri izbiri velikosti parametrov, kot so togost, delež dušenja in Newmarkova parametra.

Slika 22: Prikaz polj za izbiro in vnos parametrov analize ter gumb za izračun.

Za izvedbo primerjav lahko v tem koraku uporabnik spremeni podatke na prvi strani in ponovno požene analizo. Mapa na naslednji strani shrani zapise v obliki preglednice (Slika 23), kjer so po stolpcih zapisane vrednosti spremenljivk, kot jih je za analizo izbral uporabnik. Preglednica omogoča vpogled nad vsemi že izvedenimi izračuni, ki so vezani na URL-povezavo, ki se ustvari ob prvem vstopu v

spletno aplikacijo v brskalniku (Slika 24). Ob naslednjem vstopu v aplikacijo s pomočjo istega brskalnika lahko uporabnik vidi že izvedene analize. Če želi uporabnik deliti rezultate z drugim uporabnikom ali do njih dostopati iz drugega brskalnika oziroma naprave, si mora le shraniti URL-povezavo. Takšno shranjevanje podatkov omogoča, da lahko študent del vaje opravi na fakulteti, kasneje pa dokonča vajo in po potrebi pripravi poročilo doma, ne da bi moral ob tem shranjevati grafe posameznih analiz v obliki fotografij. Takšno shranjevanje omogoča tudi delo v paru/skupini brez ustvarjanja in deljenja uporabniških imen in gesel. Rezultate si lahko uporabnik izvozi v obliki .zip datoteke s slikami grafov (format png), legendo in pripisanimi vrednostmi (dinamični faktor, največji pomik, največja hitrost in največji pospešek).

#	Podatki o konstrukciji	Obtežba	Analiza	Izberi	Analitična?
1	m = 342 t k = 325463 kN/m ksi = 0.25	T = 0.204 s c = 5275.139 kNs/m ω = 30.849 s ⁻¹	trikotna udarna f_max = 300 kN t_max = 10 s Δt = 0.005 s	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> izbriši
2	m = 12 t k = 23564 kN/m ksi = 0	T = 0.142 s c = 0 kNs/m ω = 44.313 s ⁻¹	harmonična u0 = 0 m v0 = 0 m/s t_max = 4 s γ = 0.5 β = 0.2 Δt = 0.01 s	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/> izbriši
3	m = 34 t k = 34500 kN/m	T = 0.197 s c = 86.644 kNs/m	konstantna f_max = 10 kN	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> izbriši

Slika 23: Preglednica rezultatov analiz v zavihku »Moji izračuni« in možnost za izbiro prikaza grafov ter prikaz možnih analitičnih rešitev.

response.apps.fgg.si/si/62618ca28e18a/calculation

Slika 24: Primer URL-ja z vmesno unikatno šifro za shranjevanje rezultatov.

V preglednici rezultatov se nato izbere primer oziroma več primerov, za katere uporabnik želi prikaz grafov časovnega odziva konstrukcije in obtežbe. Izbira dveh ali treh primerov hkrati omogoča primerjave, ki so zanimive z vidika razumevanja dinamičnega odziva modela SDOF. Primerja se lahko natančnost numeričnih analiz v primerjavi z analitično. Na primer opazuje se lahko vpliv velikosti integracijskega koraka na natančnost rešitve. Prav tako pa se lahko primerja odziv različnih konstrukcij na enako obtežbo oziroma se primerja odziv konstrukcije na različne akceleroگرامe, ki so na voljo.

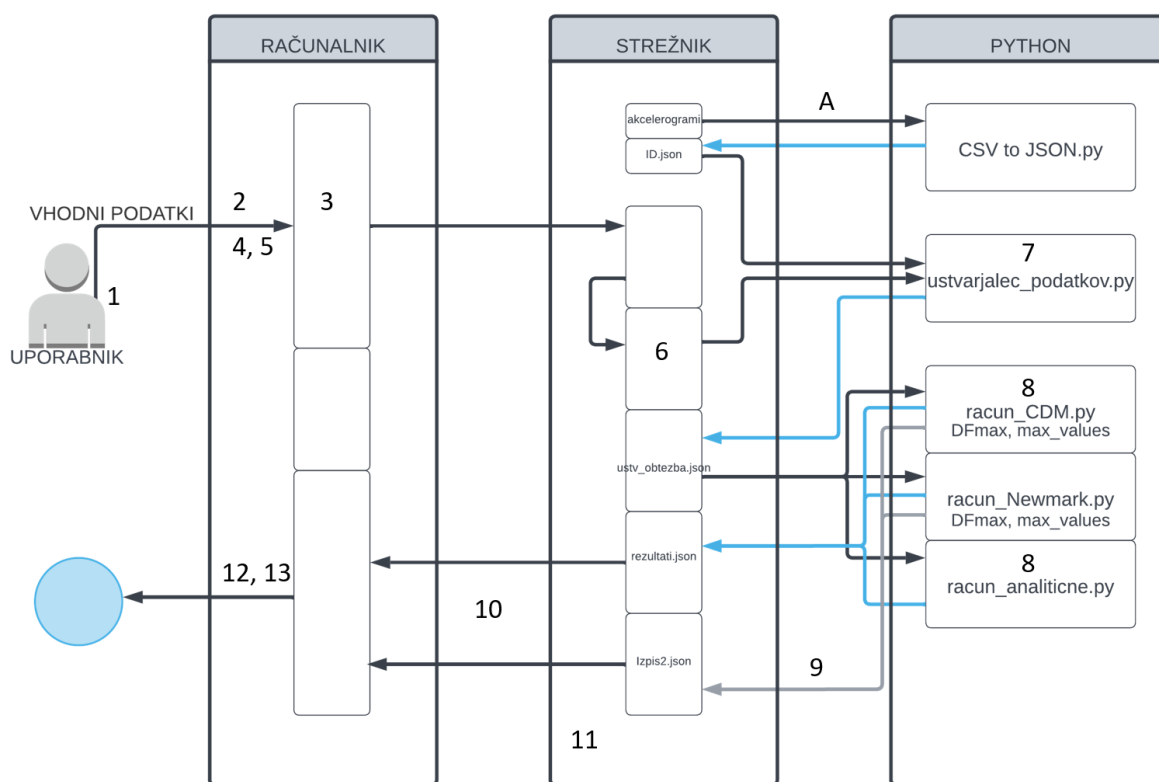
Ob pritisku gumba »PRIKAŽI GRAFE« se prikažejo grafični rezultati analiz, ki jih uporabnik izbere s seznama rezultatov. Po vrsti si poleg grafa obtežbe sledijo grafi za pomik, hitrost in pospešek v odvisnosti od časa. Za lažjo predstavbo so dodani grafi posameznih sil iz enačbe gibanja ($f_E(t)$, $f_D(t)$, $f_I(t)$).

Aplikacija omogoča tudi izvoz rezultatov (grafov) v obliki slik za uporabo v poročilih oziroma drugih dokumentih ali spletnih okoljih.

Z namenom, da bi lahko aplikacijo uporabljali tudi tuji uporabniki/študentje, je pripravljena tudi angleška različica spletne aplikacije. Menjavo med jeziki omogoča gumb na levem spodnjem delu zaslona (na dnu menija za prehod med zavihki) (Slika 20, levo spodaj). Poleg tega je zasnovana tako, da je primerna tudi za uporabo na mobilnem telefonu, kar omogoča izvedbo primerov oziroma reševanje primerov tudi med predavanji na osnovi komunikacije med profesorjem/asistentom in študenti.

4.2 Opis programskega ozadja

Spletna aplikacija deluje na več nivojih. Uporabniški vmesnik je le del spletne aplikacije, ki ga vidi uporabnik na zaslonu. V ozadju potekajo kompleksnejši procesi izmenjave in priprave podatkov ter izvedbe analiz s pomočjo programskih skript. Potek delovanja se najlažje predstavi z »Unified Modeling Language« (UML) diagramom (Slika 25). Številke korakov na diagramu se ujemajo s preglednico v Prilogi A in razlago v nadaljevanju tega podpoglavja, kjer so koraki označeni s črko K in pripadajočo številko iz diagrama.



Slika 25: Tristopenjska struktura spletne aplikacije.

Ko uporabnik prek uporabniškega vmesnika vnese začetni del podatkov o konstrukciji (K1, K2), se najprej izračunajo dodatni parametri konstrukcije, ki se pripravijo za prikaz (K3), to so lastna krožna frekvenca, lastni nihajni čas in koeficient dušenja. Vrednosti se preračunajo s pomočjo enačb, predstavljenih v drugem poglavju diplomske naloge.

Po vnosu vseh preostalih podatkov, torej podatkov o obtežbi (K4) in analizi (K5) in pritisku na gumb za izračun, se podatki zapišejo v novo datoteko tipa .json v obliki slovarja (>dictionary«). Ti podatki se

pošljejo na strežnik in prepišejo (K6). Prebere jih program za ustvarjanje funkcije (vektorja) obtežbe v odvisnosti od časa (programska skripta »ustvarjalec_podatkov.py«, K7). Vektor obtežbe v obliki slovarja (Slika 26) se pripravi glede na izbrano vrsto obtežbe, velikost intervala za analizo in izbranega časa opazovanja (datoteka »ustv_obtezba.json«).

```
"0": {
  "t": 0.0,
  "f": 300.0
},
"1": {
  "t": 0.03,
  "f": 300.0
},
```

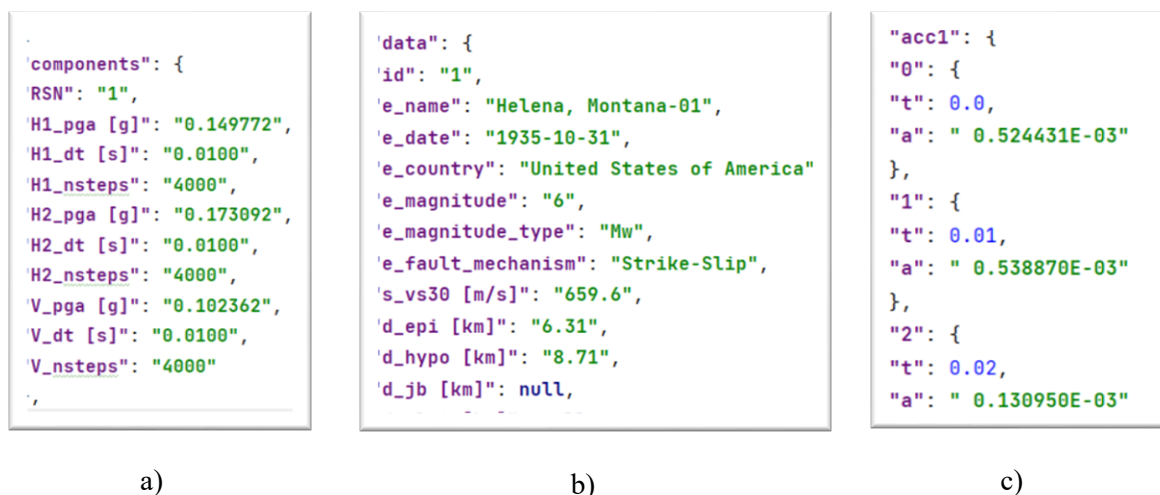
Slika 26: Pripravljen vektor obtežbe (datoteka ustv_obtezba.json).

Posebnosti so predvsem v primeru lastnega nihanja (kjer je velikost obtežbe v vseh korakih enaka nič, gibanje pa definirajo začetni pogoji) in pri potresni obtežbi.

Potresna obtežba je shranjena na strežniku v bazi akcelorogramov na način seznama datotek, formata .json, ki so bile pripravljene s pomočjo programske skripte, ki smo jo razvili za branje .csv datotek (programska skripta »CSV to JSON.py«). Program iz nabora datotek in podatkov (Slika 27), ki smo jih pridobili iz baze akcelorogramov, pripravi datoteko z vsemi podatki in vsemi tremi vektorji pospeškov tal (za smeri H1, H2 in V) in ostalimi podatki o uporabljenih akcelorogramih, kot je predstavljeno s Sliko 28 (na diagramu oznaka KA).

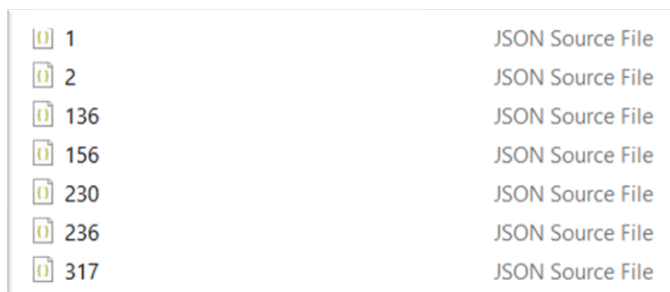
Name	Type	Size
response_spectra	File folder	
time_histories	File folder	
components	Microsoft Excel Co...	2 KB
meta	Microsoft Excel Co...	3 KB
sa_periods_[s]	Text Document	3 KB

Slika 27: Prikaz datotek pretočenih iz baze akcelorogramov.



Slika 28: Prikaz .json datoteke z vsemi podatki o potresni obtežbi: a) podatki o komponentah (»components«), b) splošni podatki o potresu (»meta«) in c) prikaz prvih treh vrednosti vektorja pospeškov za komponento pospeškov H1 (»acc1«).

Datoteka za posamezen zapis pospeškov tal je poimenovana glede na ID-zapisa (Slika 29), kot je določena v osnovni bazi akceleroگرامov (Šebenik in Dolšek 2016). Tak način pripravljanja vhodnih podatkov omogoča, da se po potrebi kasneje izbor zapisov spremeni oziroma dopolni, če bi bilo ugotovljeno, da so za reševanje nalog v okviru vaj potrebni dodatni akceleroگرامi.



Slika 29: Interna baza akceleroگرامov in prikaz poimenovanja glede na ID zapisa.

Ko uporabnik izbere zapis pospeškov tal pri določenem potresu, programska skripta iz baze (Slika 29) pokliče datoteko s pripadajočim ID-jem. Glede na izbrano smer program izbere vektor pospeškov in ga uporabi za pripravo datoteke z obtežbo. Časovni interval pospeškov je odvisen od same naprave, ki meri pospeške (tj. koraka akcelerograma). Uporabnik lahko kljub temu za analizo izbere poljuben integracijski korak, programska skripta (»ustvarjalec_podatkov.py«) pa za manjkajoče vrednosti na časovni osi izvede linearno interpolacijo. Da se določi zunanjo obtežbo v smislu sile, je treba pospeške tal pomnožiti še z maso konstrukcije, da velja oblika enačbe, kot je predstavljena v teoretičnem delu diplomske naloge.

Pripravljenih datotek o obtežbi, ki je rezultat tega dela programa, uporabnik ne vidi. Gre za vrsto spremenljivke slovar, kjer je ključ enak indeksu (zaporedni številki) koraka, v vsakem zapisu pa je ugnjezen slovar z zapisom o času in velikosti zunanje obtežbe (Slika 26). Ta datoteka potuje do programske skripte za izvedbo analize.

Za vsako vrsto analize smo pripravili svoj algoritem, kot je to predstavljeno v teoretičnem delu diplomske naloge, in razvili ustrezno programsko skripto, to sta »racun_Newmark.py« in »racun_CDM.py«. Ko Zagnana programska skripta prebere podatke o konstrukciji, vnese datoteko o obtežbi kot slovar in nato izvede izračune za vsak časovni korak (K8) na podlagi algoritmov, predstavljenih v drugem poglavju. Rezultati se za vsak časovni korak ponovno zapišejo v obliki slovarja, kjer ključ spet predstavlja številko koraka, v ugnezenem slovarju pa so zapisi o času, izračunan pomik, hitrost in pospešek. Dodani so tudi rezultati o posameznih silah, če enačbo zapišemo, kot je predstavljeno z En. (2). Ustvarjanje zapisa z rezultati je narejeno v obliki zanke, tako da se algoritem ponavlja, dokler ne pride do konca vseh intervalov. Vsi zapisi se združijo v en slovar in se odložijo v novo ustvarjeno datoteko z rezultati (Slika 30). Ta je pripravljena za izris grafov. Poleg teh grafov se izriše še graf obtežbe, ki se za namen analize pripravi kot vhodni podatek.

Med pripravo rezultatov si programska skripta shrani tudi maksimalne vrednosti kinematičnih količin (pomik, hitrost in pospešek) ter izračuna dinamični faktor, če ta obstaja. Vrednosti pripravi za izpis ob grafih (K9).

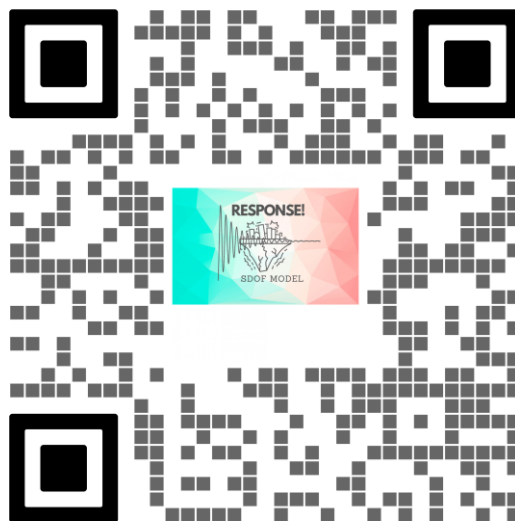
Poleg numeričnih rešitev je vključena tudi programska skripte za izračun analitičnih rešitev (K8). Programska skripta »racun_analiticne.py« prepozna vrsto problema in v primeru, da za tako vrsto problema obstaja analitična formula, pripravi dodatno datoteko z analitičnimi rešitvami. Pri tem želimo, da je korak manjši kot pri numerični metodi, da lahko primerjamo vpliv velikosti integracijskega koraka na natančnost numerične rešitve. Interval za pripravo analitičnih rešitev zavzame manjšo od vrednosti polovice integracijskega koraka pri numerični metodi in petdesetine nihajnega časa konstrukcije.

V zadnjem zavihku sledi torej le še izris grafov s pomočjo programske skripte »graf.py« (K10). Prikazujejo in oblikujejo se dinamično glede na število izbranih primerov s pripadajočimi oznakami, da se lahko izvedejo željene primerjave (K11). V tem koraku si lahko uporabnik izvozi še .zip datoteko s slikami vseh izrisanih grafov v formatu .png (K12).

Za lažjo predstavo poteka procesov aplikacije smo pripravili bolj podroben opis posameznih procesov po zaporednem vrstnem redu, vključno z opisom datotek, ki so vključene v procese spletne aplikacije, in rezultat posameznega procesa. Za dostop do aplikacije se lahko uporabi QR-koda na Sliki 31 ali dodana povezava pod njo.


```
{  
  "0": {  
    "t": 0.0,  
    "u": 0,  
    "v": 0,  
    "a": 0.6666666666666666,  
    "fI": 20.0,  
    "fD": 0.0,  
    "fE": 0  
  },  
  "1": {  
    "t": 0.05,  
    "u": 0.0008333333333333335,  
    "v": 0.0,  
    "a": 0.6666666666666667,  
    "fI": 20.000000000000004,  
    "fD": 0.0,  
    "fE": 0.8333333333333335  
  },  
}
```

Slika 30: Oblika pripravljenih rezultatov za prikaz.



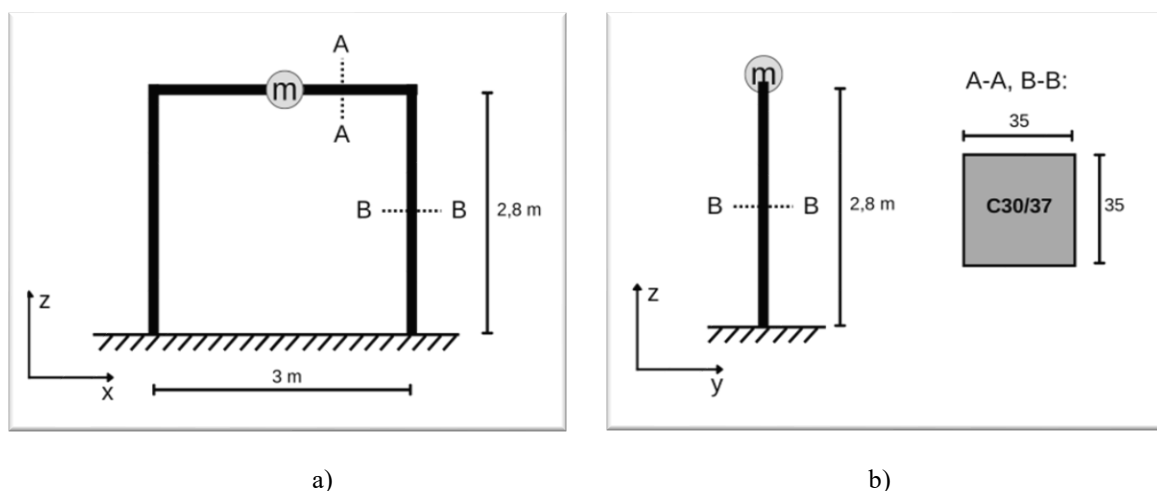
Slika 31: QR-koda s povezavo do aplikacije (URL: <http://response.apps.fgg.si/>).

»Ta stran je namenoma prazna.«

5 TESTNI PRIMERI

5.1 Potresna obtežba: primerjava med komponentami

Prvi testni primer prikazuje potresni odziv portalnega okvirja (Slika 32) za vse tri komponente potresne obtežbe. Okvir smo za namen izračuna togosti v različni smeri zmodelirali v programu SAP 2000. Pri tem smo uporabili beton C30/37 in kvadraten prerez dimenzij 35/35cm, in sicer tako za prečko kot za stebre. Upoštevali smo razpokanost prereza (redukcija strižnega prereza). Pripravili smo okvir višine 2,8m z razponom 3m. Za izračun togosti smo uporabili tri enotske sile. Eno v smeri ravnine okvirja, drugo pravokotno na nosilec v horizontalni smeri na polovici razpona nosilca, tretjo pa v vertikalni smeri na sredini nosilca. Pognali smo analizo za vse tri sile, izpisali dobljene pomike in izračunali togost v vseh treh smereh kot razmerje med silo in dobljenim pomikom, kar predstavlja vhodni podatek za spletno aplikacijo.



Slika 32: Model portalnega okvirja: a) pogled v ravnini x-z b) pogled v ravnini y-z in uporabljen prerez.

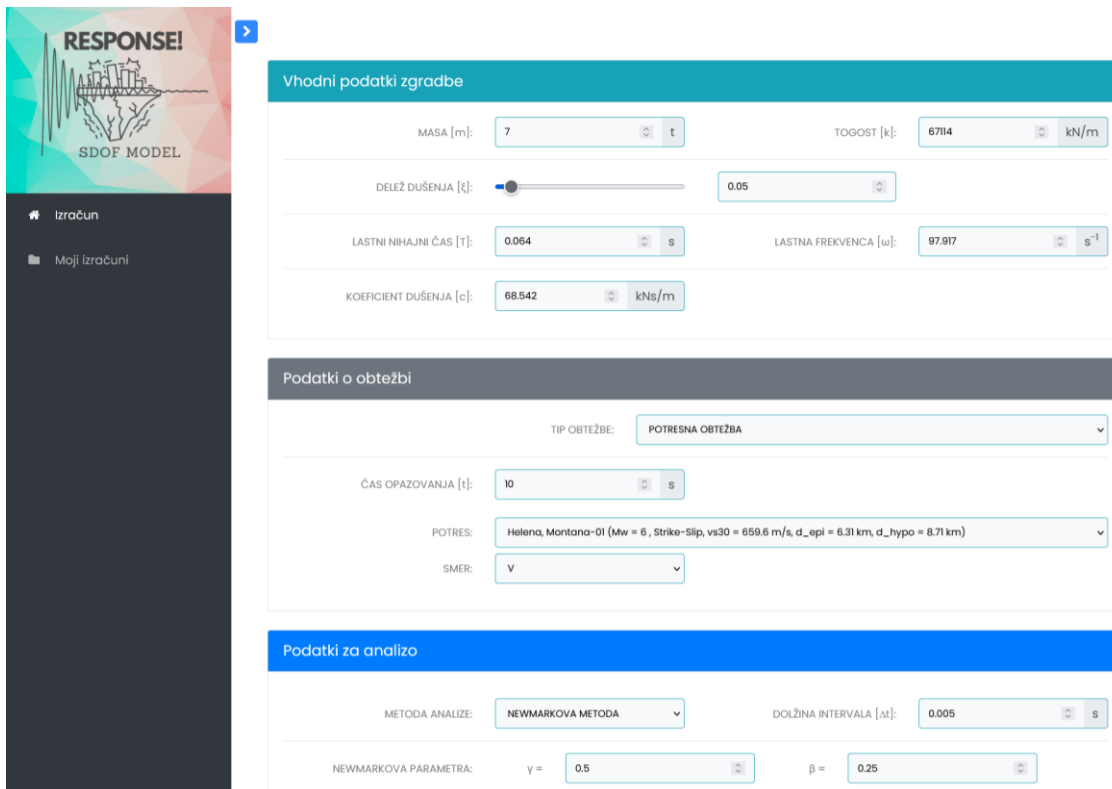
V vertikalni smeri smo dobili največjo togost konstrukcije ($k_z = 67114 \text{ kN/m}$). Pričakovano je bilo ugotovljeno, da je okvir bolj tog v smeri ravnine okvirja ($k_x = 14825 \text{ kN/m}$), kot pravokotno na ravnino okvirja ($k_y = 500 \text{ kN/m}$). Za namen analize smo predpostavili, da je ravnina okvirja vzporedna s komponento potresa H1, komponenta H2 deluje pravokotno na ravnino okvirja, vertikalno togost pa smo uporabili za analizo vertikalne komponente potresa V. Predpostavili smo, da je na sredini okvirja točkovna masa velikosti 7 ton.

Za potres smo izbrali zapis potresa Helena, Montana-01. Uporabili smo Newmarkovo metodo z izbranim integracijskim korakom 0,005s ter parametroma $\gamma = 0,5$ in $\beta = 0,25$ (vnos podatkov za vertikalno smer je na Sliki 33a)). Izvedli smo torej analize za vse tri smeri (H1, H2 in V), jih izbrali na seznamu izračunov (Slika 33 b)) in izbrali ukaz za prikaz grafov.

Na prvem grafu (Slika 34) lahko primerjamo potresno obtežbo v vseh treh smereh. Izračunana je kot produkt mase in pospeška tal iz akcelorograma. Na Sliki 35 a) si lahko ogledamo vse tri grafe pomikov v odvisnosti od časa. Opazimo, da so pomiki pravokotno na ravnino okvirja mnogo večji kot v drugih dveh smereh, kar lahko pripišemo majhni togosti konstrukcije v tej smeri. Najmanjši so bili pomiki v vertikalni smeri, kjer je togost konstrukcije največja, lastni nihajni čas pa najmanjši.

S Slike 35 b) je razvidno, da v horizontalnih smereh konstrukcija razvije večje hitrosti kot v vertikalni smeri, podobno velja za pospeške (Slika 35 c)). Sile, ki pripadajo posameznim kinematičnim količinam, pa so prikazane na Sliki 36.

Primer nam torej omogoča primerjavo med različnimi komponentami potresne obtežbe ob upoštevanju različnih togosti konstrukcije glede na izbrano smer in različnimi karakteristikami tal v horizontalni in vertikalni smeri. Za bolj nazorno interpretacijo rezultatov bomo v bodoče razvili še prikaza spektrov pospeškov, kar bo omogočalo vpogled v potresne sile hkrati za vse tri smeri potresa.



Vhodni podatki zgradbe

MASA [m]: 7 t TOGOST [k]: 67114 kN/m

DELEŽ DUŠENJA [c]: 0.05

LASTNI NIHAJNI ČAS [T]: 0.064 s LASTNA FREKVENCA [ω]: 97.917 s⁻¹

KOEFICIENT DUŠENJA [c]: 68.542 kNs/m

Podatki o obtežbi

TIP OBTEŽBE: POTRESNA OBTEŽBA

ČAS OPAZOVANJA [t]: 10 s

POTRES: Helena, Montana-01 (Mw = 6, Strike-Slip, vs30 = 659.6 m/s, d_epi = 6.31 km, d_hypo = 8.71 km)

SMER: V

Podatki za analizo

METODA ANALIZE: NEWMARKOVA METODA DOLŽINA INTERVALA [Δt]: 0.005 s

NEWMARKOVA PARAMETRA: γ = 0.5 β = 0.25

a)

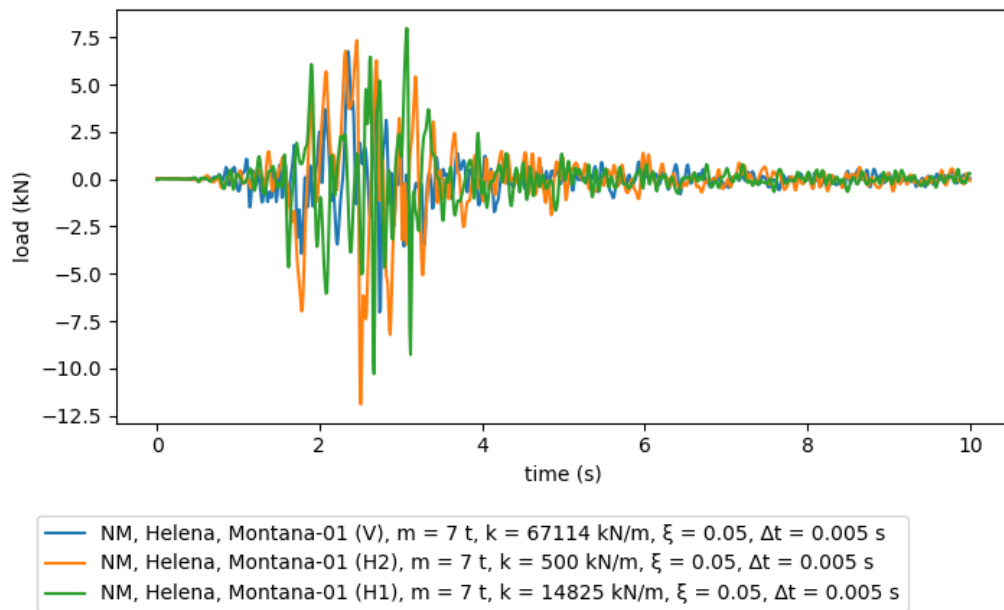


Seznam izračunov

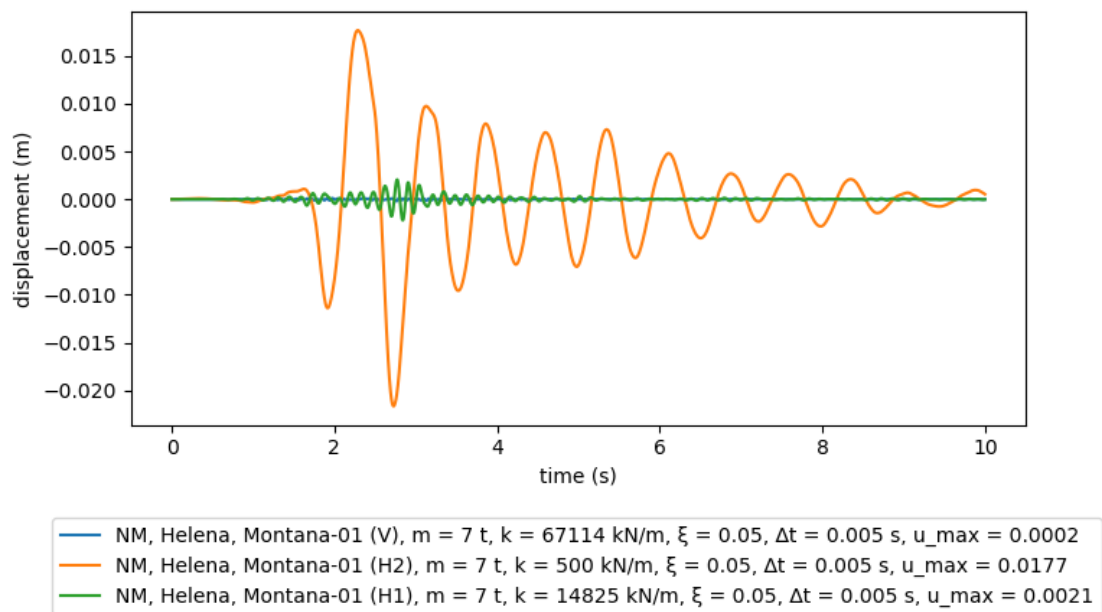
#	Podatki o konstrukciji	Obtežba	Analiza	Izberi	Analična?
1	m = 7 t k = 67114 kN/m ksi = 0.05	T = 0.064 s c = 68.542 kNs/m ω = 97.917 s ⁻¹	potresna Helena, Montana-01 V t_max = 10 s	newmark γ = 0.5 β = 0.25 Δt = 0.005 s	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="button" value="izbriši"/>
2	m = 7 t k = 500 kN/m ksi = 0.05	T = 0.743 s c = 5.916 kNs/m ω = 8.452 s ⁻¹	potresna Helena, Montana-01 H2 t_max = 10 s	newmark γ = 0.5 β = 0.25 Δt = 0.005 s	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="button" value="izbriši"/>
3	m = 7 t k = 14825 kN/m ksi = 0.05	T = 0.137 s c = 32.214 kNs/m ω = 46.02 s ⁻¹	potresna Helena, Montana-01 H1 t_max = 10 s	newmark γ = 0.5 β = 0.25 Δt = 0.005 s	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="button" value="izbriši"/>

b)

Slika 33: Primerjava komponent potresne obtežbe: a) uporabniški vmesnik z vhodnimi podatki, b) seznam rezultatov.

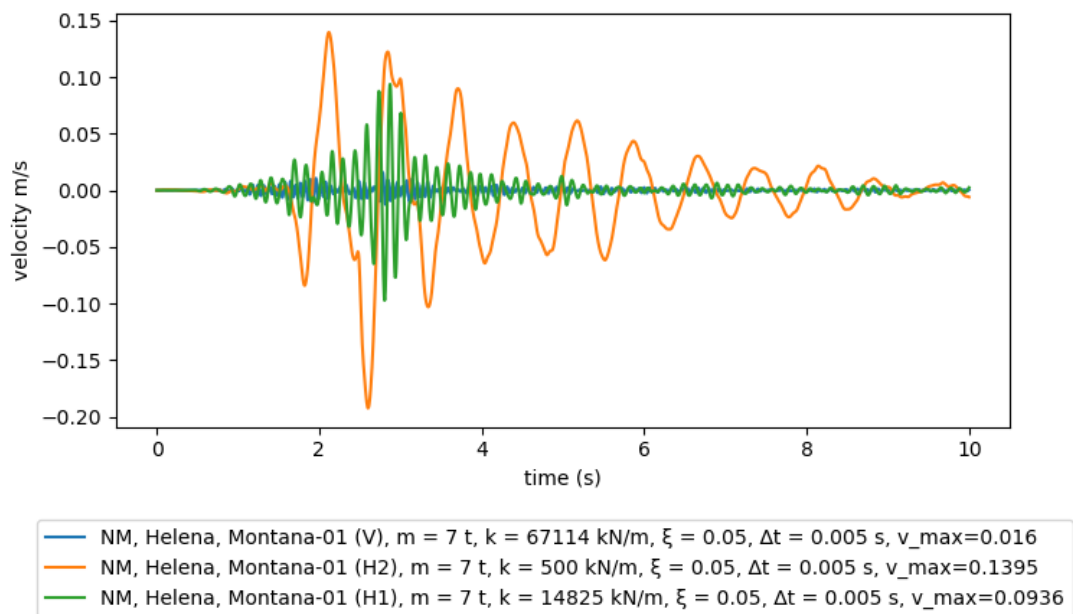


Slika 34: Primerjava komponent potresne obtežbe v odvisnosti od časa.

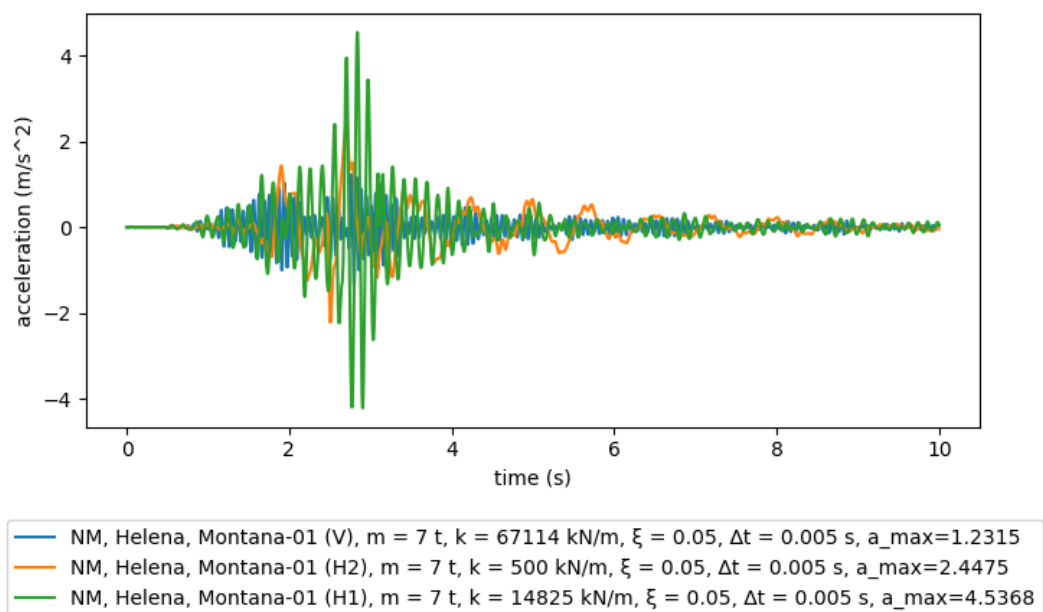


a)

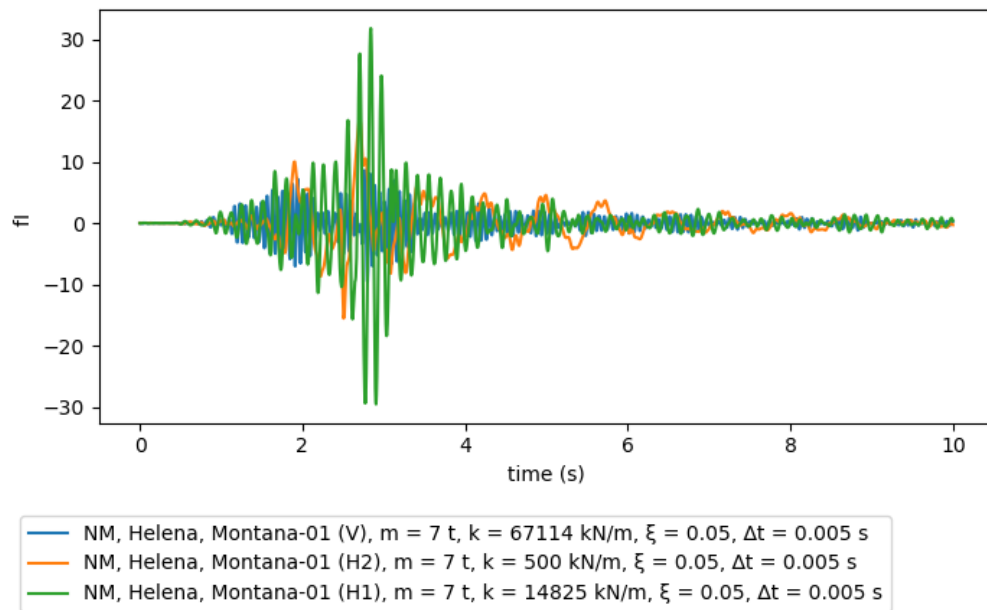
Slika 35: Kinematične količine v odvisnosti od časa za vse tri komponente potresne obtežbe: a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»Se nadaljuje...«)



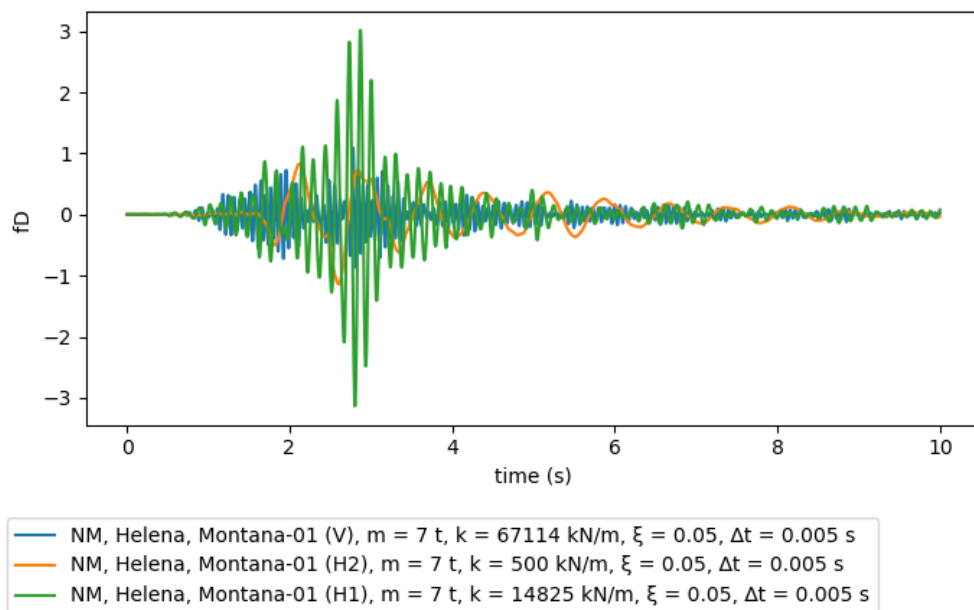
b)



Slika 35: Kinematične količine v odvisnosti od časa za vse tri komponente potresne obtežbe: a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»...nadaljevanje.«)

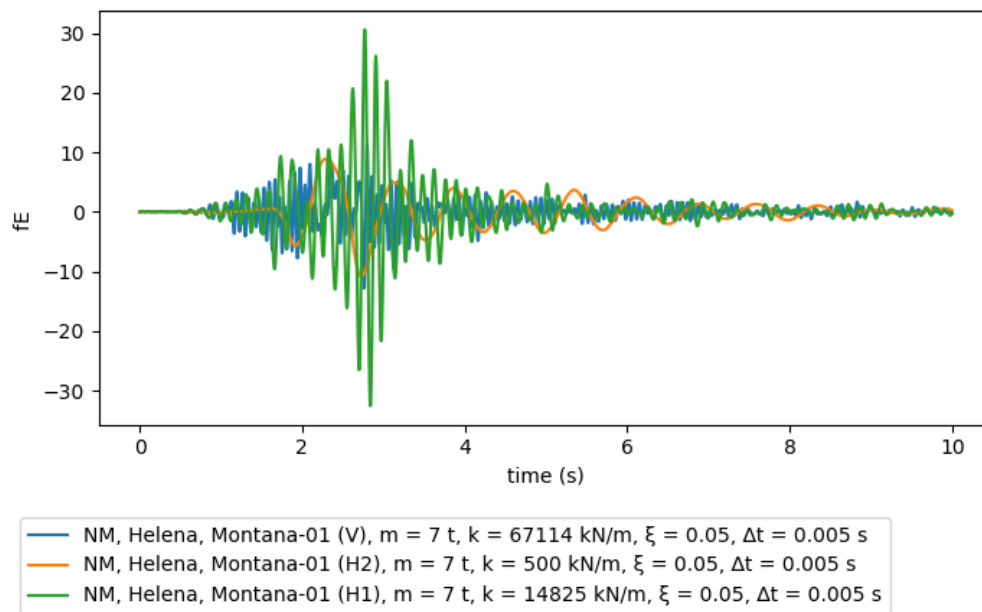


a)



b)

Slika 36: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za potresno obtežbo: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. (»Se nadaljuje...)



c)

Slika 36: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za potresno obtežbo: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. («...nadaljevanje.»)

5.2 Razlika med numerično in analitično rešitvijo ter vpliv integracijskega koraka

V drugem testnem primeru smo obravnavali vpliv velikosti izbranega integracijskega koraka na natančnost rešitve in primerjavo med numerično in analitično rešitvijo. Za ta primer smo izbrali metodo simetričnih diferenc in izvedli tri analize z različnimi velikostmi integracijskega koraka ($\Delta t = 0.001\text{s}$, $\Delta t = 0.01\text{s}$ in $\Delta t = 0.05\text{s}$).

Parametri konstrukcije so bili v vseh treh primerih enaki, kot je prikazano na Sliki 37 a). Izvedene analize so se shranile v osebno bazo podatkov, kjer lahko na desni strani preglednice opazimo, da za izbran tip obtežbe obstaja tudi analitična rešitev. Ta se je izračunala glede na manjši časovni interval, kriterij za to je manjša od vrednosti petdesetine lastnega nihajnega časa konstrukcije in polovice velikosti integracijskega koraka numerične analize. V preglednici (Slika 37 b)) smo torej izbrali vse tri izvedene analize in pritisnili ukaz za prikaz grafov. Na prvem grafu (Slika 38) je prikazana zunanja obtežba v odvisnosti od časa. Izbrali smo konstantno obtežbo z velikostjo 100kN. Na drugem grafu (Slika 39 a)) je prikazan pomik v odvisnosti od časa. Opazimo lahko, da se analitične rešitve vseh treh primerov pričakovano prekrivajo, pri numeričnih rešitvah pa lahko opazujemo vpliv velikosti integracijskega koraka na natančnost analize. Pri zelo majhnem integracijskem koraku (primer, ko je bil $\Delta t = 0.001\text{s}$) se numerična rešitev ujema z analitično do te mere, da razlika na grafu ni opazna. Pri desetkrat večjem integracijskem koraku ($\Delta t = 0.01\text{s}$), lahko opazimo, da pride do skrajšanja lastne periode konstrukcije, glede amplitude pomikov pa so rezultati še vedno natančni (opazno iz vrednosti maksimalnega pomika in dinamičnega faktorja). Za največji izbran integracijski korak ($\Delta t = 0.05\text{s}$) rešitev ni več gladka krivulja, kot smo pričakovali. Funkcija pomika zavzame obliko nepravilne lomljenke, neujemanje z analitično rešitvijo pa je očitno. Kljub temu da analiza s tako velikim integracijskim korakom še vedno približno pričakovano vrednost dinamičnega faktorja.

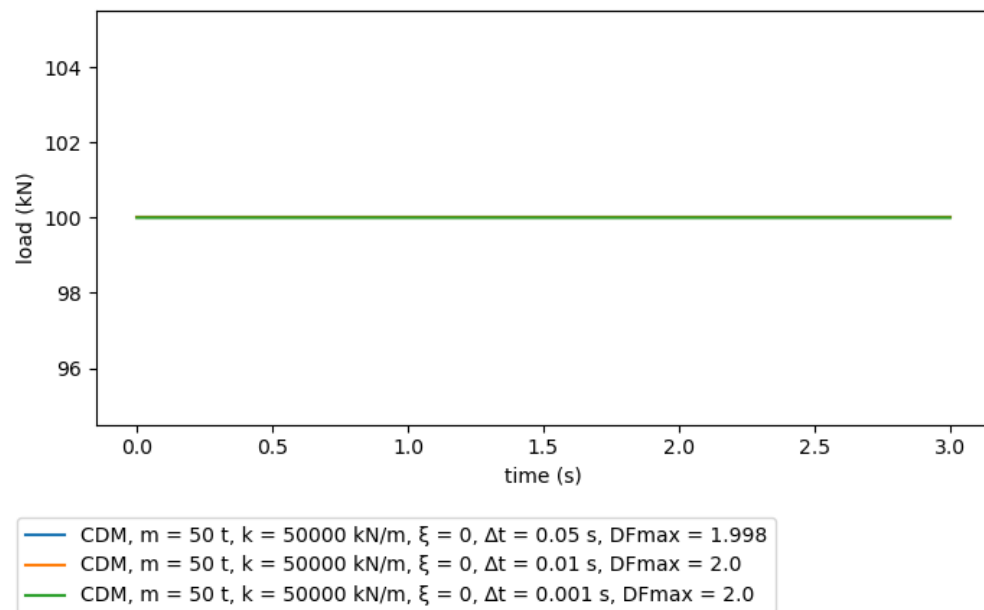
Pri izbiri nesmiselno velikega integracijskega koraka bi programska skripta vrnila napako, ker se za vsak korak izvaja kontrola ravnotežja, ki se pri prevelikem integracijskem koraku pri numerični analizi poruši. Sledita grafa hitrosti (Slika 39 b)) in pospeška (Slika 39 c)) v odvisnosti od časa. Pri obeh opazimo podobne karakteristike kot v primeru pomikov. Predstavljeni so tudi grafi sil v enačbi gibanja v odvisnosti od časa (Slike 40a), b), c)). Iz slike 40 a) je razvidno, da smo izvajali analize za primer, ko nismo upoštevali dušenja.

a)

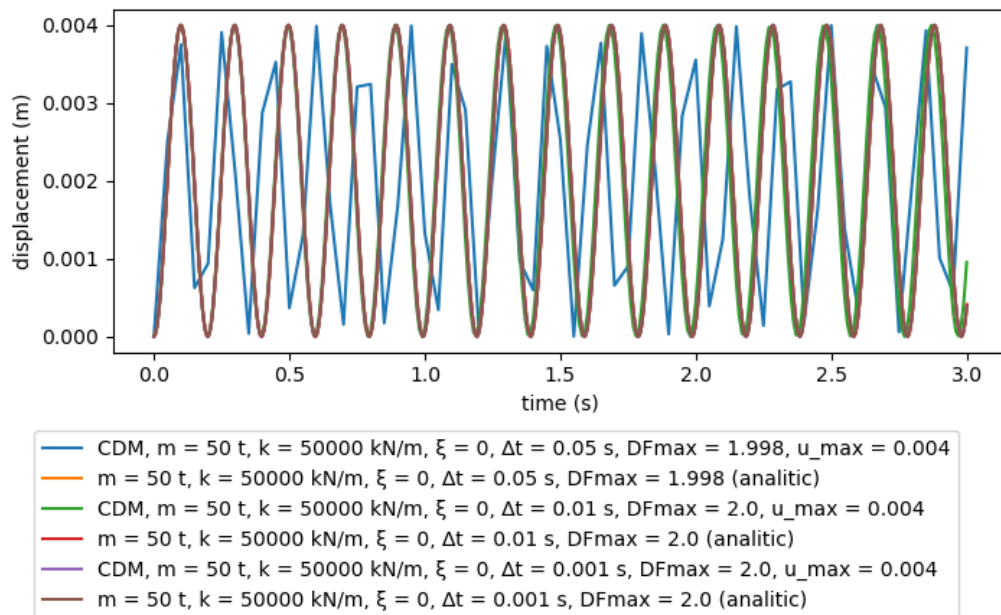
#	Podatki o konstrukciji	Obtežba	Analiza	Izberi	Analitična?
1	m = 9 t k = 3500 kN/m ksi = 0.13	T = 0.319 s c = 46.145 kNs/m ω = 19.72 s⁻¹	lastno gibanje u0 = 0.05 m v0 = 0 m/s t_max = 4 s	CDM Δt = 0.01 s	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> izbriši
2	m = 9 t k = 3500 kN/m ksi = 0.05	T = 0.319 s c = 17.748 kNs/m ω = 19.72 s⁻¹	lastno gibanje u0 = 0.05 m v0 = 0 m/s t_max = 4 s	CDM Δt = 0.01 s	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> izbriši
3	m = 9 t k = 3500 kN/m ksi = 0.02	T = 0.319 s c = 7.099 kNs/m ω = 19.72 s⁻¹	lastno gibanje u0 = 0.05 m v0 = 0 m/s t_max = 4 s	CDM Δt = 0.01 s	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> izbriši
4	m = 50 t k = 50000 kN/m ksi = 0	T = 0.199 s c = 0 kNs/m ω = 31.623 s⁻¹	konstantna f_max = 100 kN t_max = 3 s	CDM Δt = 0.05 s	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> izbriši
5	m = 50 t k = 50000 kN/m ksi = 0	T = 0.199 s c = 0 kNs/m ω = 31.623 s⁻¹	konstantna f_max = 100 kN t_max = 3 s	CDM Δt = 0.01 s	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> izbriši
6	m = 50 t k = 50000 kN/m ksi = 0	T = 0.199 s c = 0 kNs/m ω = 31.623 s⁻¹	konstantna f_max = 100 kN t_max = 3 s	CDM Δt = 0.001 s	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> izbriši

b)

Slika 37: Primerjava numerične in analitične rešitve ter vpliv velikosti integracijskega koraka: a) vnos podatkov v uporabniški vmesnik, b) preglednica izvedenih analiz.

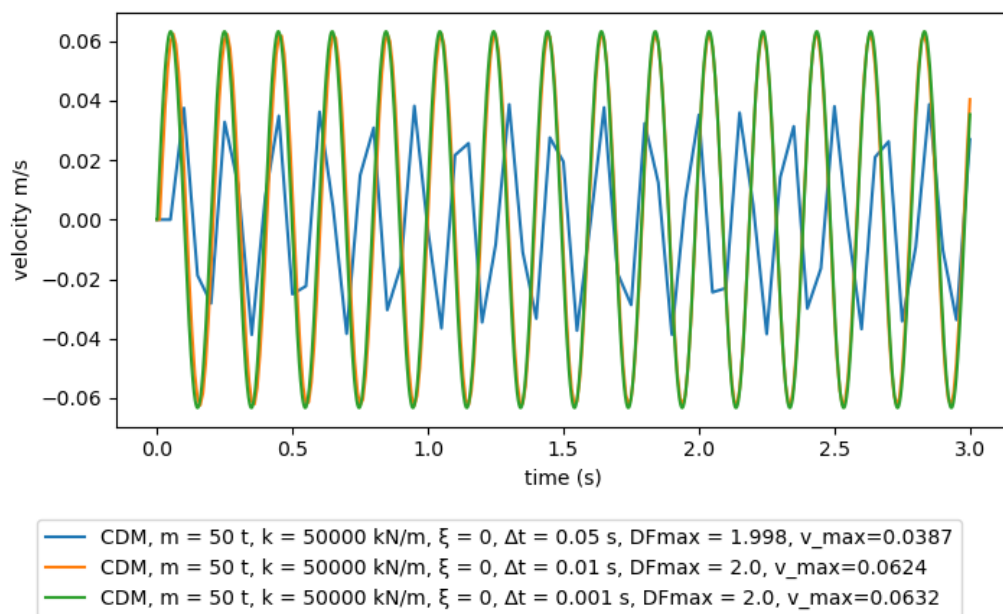


Slika 38: Zunanja obtežba v odvisnosti od časa.

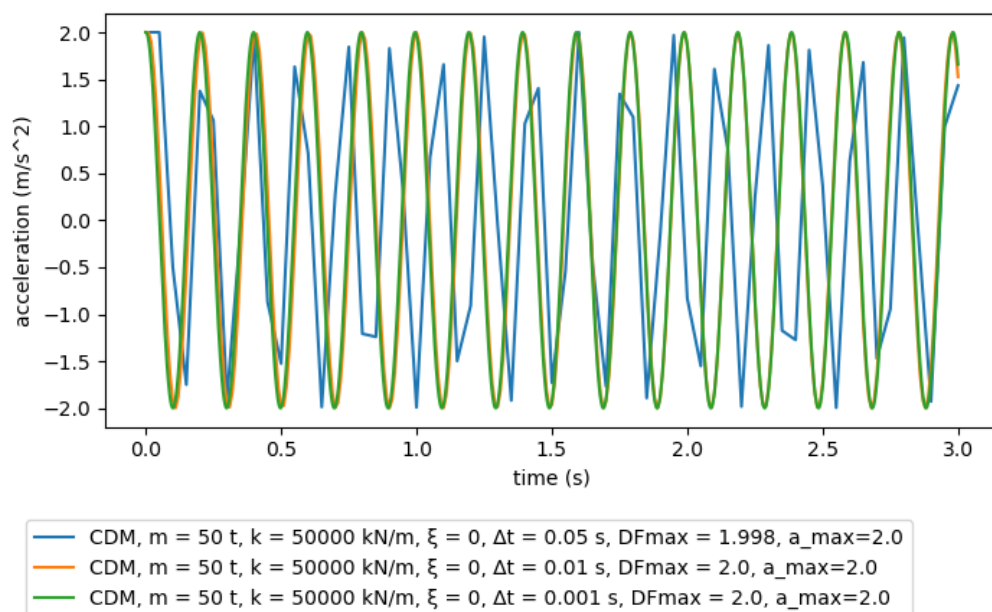


a)

Slika 39: Kinematične količine v odvisnosti od časa za vse različne velikosti integracijskega koraka pri numerični analizi za konstantno zunanjo obtežbo: a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»Se nadaljuje...«)

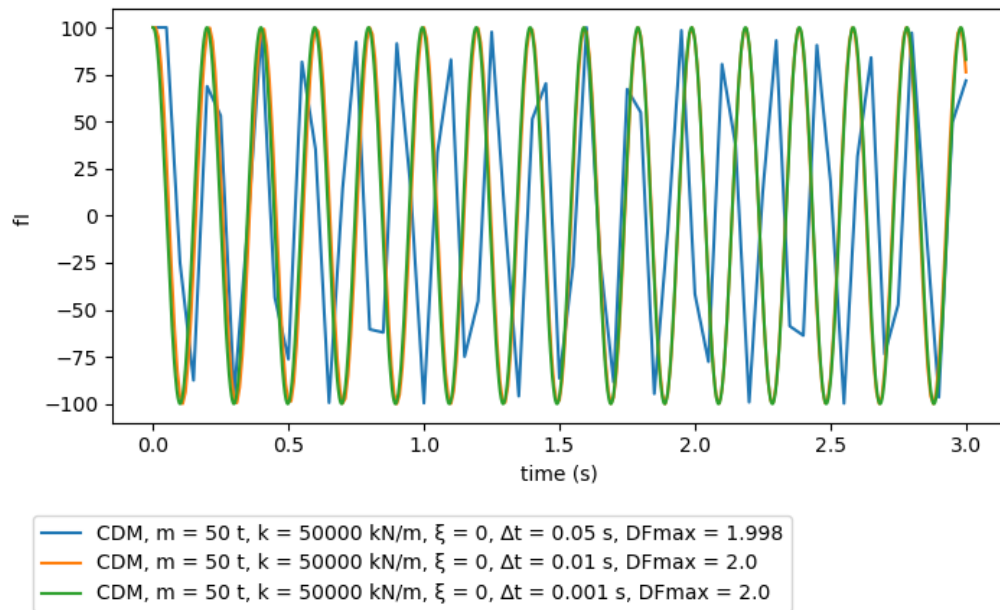


b)

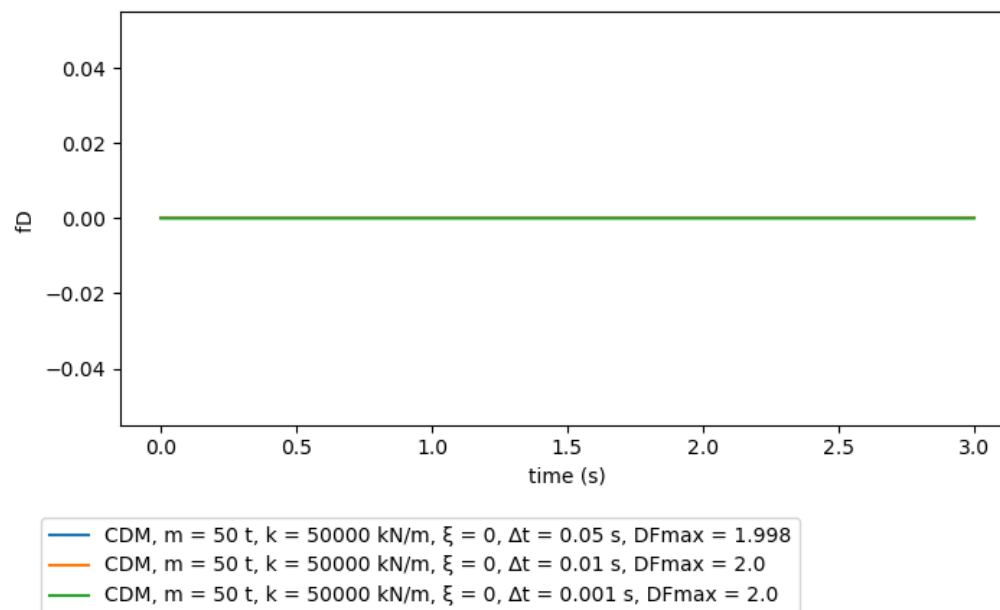


c)

Slika 39: Kinematične količine v odvisnosti od časa za vse različne velikosti integracijskega koraka pri numerični analizi za konstantno zunanjo obtežbo a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»...nadaljevanje.«)

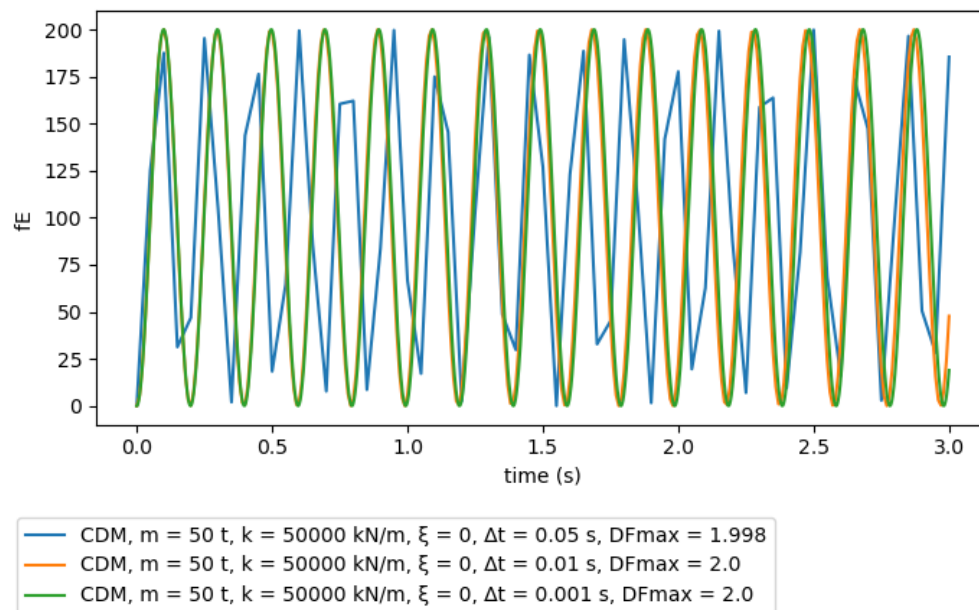


a)



b)

Slika 40: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za konstantno obtežbo brez dušenja: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. (»Se nadaljuje...«)



c)

Slika 40: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za konstantno obtežbo brez dušenja: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. («...nadaljevanje.»)

5.3 Vpliv dušenja na lastno nihanje

V zadnjem testnem primeru smo prikazali možnost preučevanja deleža kritičnega dušenja na lastno nihanje. Pri tem smo trikrat izvedli analizo za konstrukcijo z enako maso ($m = 9t$) in enako togostjo ($k = 3500kN/m$). Spreminjali smo torej delež kritičnega dušenja, kar omogoča drsnik v razdelku za vhodne podatke konstrukcije. Zagnali smo tri različne analize za vrednosti $\xi = 0,02$ (2% dušenje), $\xi = 0,05$ (5% dušenje, kar je vrednost, ki jo priporoča standard, če nimamo druge ocene) in $\xi = 0,13$ (13% dušenje, kar predstavlja relativno visoko vrednost dušenja). Pri tem smo lahko opazovali, kako se je pri spreminjanju deleža dušenj dinamično spreminjala tudi vrednost koeficienta dušenja, ki ga vrne aplikacija že med vnašanjem podatkov.

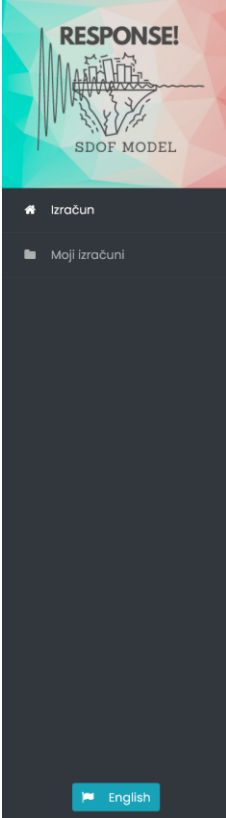
Za analizo vpliva dušenja smo izbrali torej lastno nihanje, čas opazovanja smo nastavili na 4s, začetni pomik na 0,05m, začetno hitrost pa na vrednost 0m/s. Začetne pogoje smo v vseh treh primerih predpostavili enake, saj nam takšna izbira omogoča smiselno primerjavo rezultatov. Tudi tokrat smo analizo izvedli z metodo simetričnih diferenc, dolžino časovnega intervala pa smo nastavili na vrednost $\Delta t = 0.01s$, kar je smiselna velikost integracijskega koraka glede na preračunan lastni nihajni čas obravnavane konstrukcije (izbrane parametre prikazuje Slika 41 a)).

Rezultati so se tudi tokrat shranili v osebno mapo (Slika 41 b)), vezano na unikatni URL, ki ga je brskalnik ustvaril ob našem prvem vstopu v aplikacijo. Na seznamu rezultatov so tudi zapisi drugega testnega primera, kar predstavlja funkcijo shranjevanja rezultatov in možnost ponovnega dostopa do in njihovega prikaza.

Rezultate vseh treh izvedenih analiz tega testnega primera smo torej želeli prikazati hkrati (aplikacija omogoča tudi prikaz le enega ali dveh primerov). Prvi prikazan graf (Slika 42) nam je tudi v tem primeru predstavil izbran primer obtežbe. Ker smo izbrali lastno nihanje, je vrednost zunanje obtežbe konstantna in enaka 0.

Sledijo si grafi kinematičnih količin v odvisnosti od časa, torej pomika (Slika 43 a)), hitrosti (Slika 43 b)) in pospeška (Slika 43 c)). Opazimo lahko, da se amplituda pomikov z večanjem deleža dušenja hitreje zmanjšuje (nihanje se torej hitreje uduši). Podobno obnašanje lahko opazimo tudi pri grafih hitrosti in pospeškov v odvisnosti od časa, kjer lahko primerjamo tudi vrednosti največjih doseženih hitrosti in pospeškov.

Ker za to vrsto problema obstaja tudi analitična rešitev, lahko opazujemo tudi to primerjavo. Sile, prikazane z grafi na Sliki 44 a), b) in c), se spreminjajo v skladu s pripadajočimi kinematičnimi količinami. Testni primer predstavlja možnost, kako študentom oziroma uporabniku približati pojem dušenja.



RESPONSE! SDOF MODEL

Vhodni podatki zgradbe

TOGOST konstrukcije pove, kako velika sila je potrebna za enoto pomika.

MAŠA [m]: 9 t TOGOST [k]: 3500 kN/m

DELEŽ DUŠENJA [ζ]: 0.05

LASTNI NIHAJNI ČAS [T]: 0.319 s LASTNA FREKVENCA [ω]: 19.72 s⁻¹

KOEFICIENT DUŠENJA [c]: 17.748 kNs/m

Podatki o obtežbi

TIP OBTEŽBE: LASTNO NIHANJE

ČAS OPAZOVANJA [t]: 4 s

začetni pomik: 0.05 m začetna hitrost: 0 m/s


Podatki za analizo


METODA ANALIZE: METODA SIMETRIČNIH DIFERENC


DOLŽINA INTERVALA [Δt]: 0.01 s

IZRAČUNAJ

a)



 Izračun

 Mojji izračuni

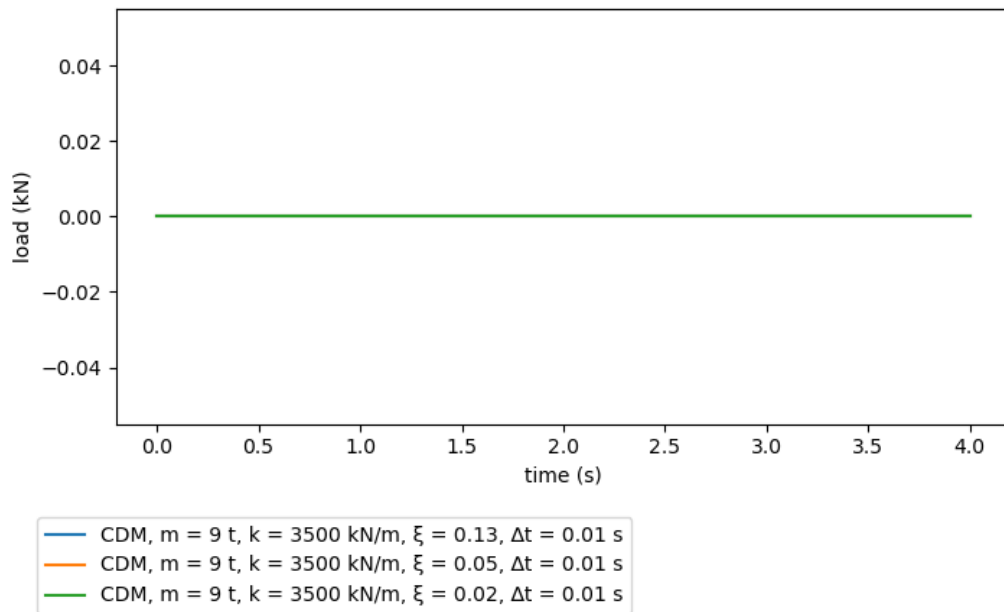
PRIKAŽI GRAFE

Seznam izračunov

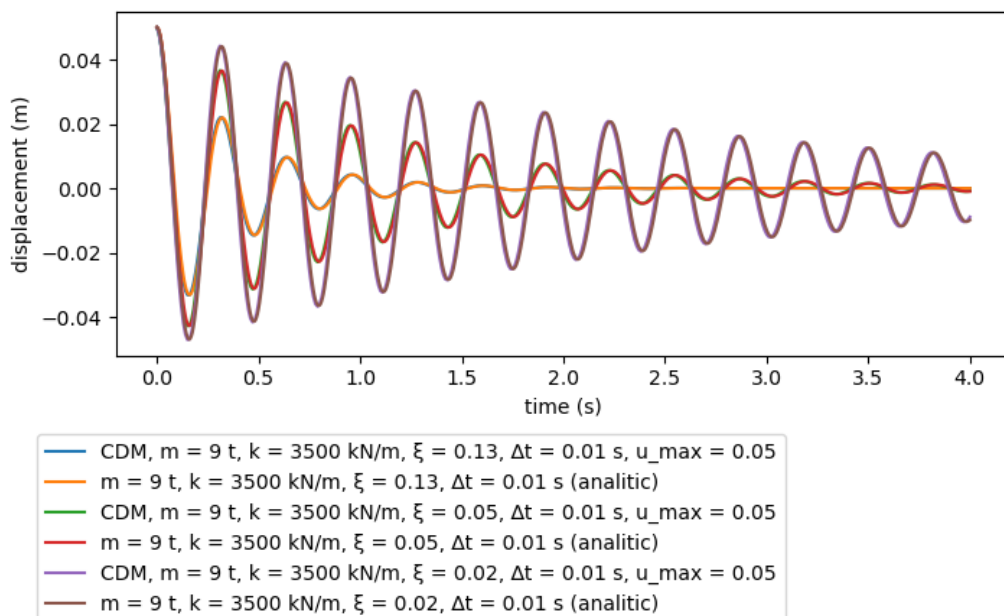
#	Podatki o konstrukciji	Obtežba	Analiza	Izberi	Analitična?		
1	m = 9 t k = 3500 kN/m ksi = 0.13	T = 0.319 s c = 46.145 kNs/m $\omega = 19.72 \text{ s}^{-1}$	lastno gibanje u0 = 0.05 m v0 = 0 m/s t_max = 4 s	CDM $\Delta t = 0.01 \text{ s}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<div>izbriši</div>
2	m = 9 t k = 3500 kN/m ksi = 0.05	T = 0.319 s c = 17.748 kNs/m $\omega = 19.72 \text{ s}^{-1}$	lastno gibanje u0 = 0.05 m v0 = 0 m/s t_max = 4 s	CDM $\Delta t = 0.01 \text{ s}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<div>izbriši</div>
3	m = 9 t k = 3500 kN/m ksi = 0.02	T = 0.319 s c = 7.099 kNs/m $\omega = 19.72 \text{ s}^{-1}$	lastno gibanje u0 = 0.05 m v0 = 0 m/s t_max = 4 s	CDM $\Delta t = 0.01 \text{ s}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<div>izbriši</div>
4	m = 50 t k = 50000 kN/m ksi = 0	T = 0.199 s c = 0 kNs/m $\omega = 31.623 \text{ s}^{-1}$	konstantna f_max = 100 kN t_max = 3 s	CDM $\Delta t = 0.05 \text{ s}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<div>izbriši</div>
5	m = 50 t k = 50000 kN/m ksi = 0	T = 0.199 s c = 0 kNs/m $\omega = 31.623 \text{ s}^{-1}$	konstantna f_max = 100 kN t_max = 3 s	CDM $\Delta t = 0.01 \text{ s}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<div>izbriši</div>
6	m = 50 t k = 50000 kN/m ksi = 0	T = 0.199 s c = 0 kNs/m $\omega = 31.623 \text{ s}^{-1}$	konstantna f_max = 100 kN t_max = 3 s	CDM $\Delta t = 0.001 \text{ s}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<div>izbriši</div>

b)

Slika 41: Opazovanje vpliva dušenja na lastno nihanje: a) vnos podatkov v uporabniški vmesnik, b) izbira primerov iz seznama rezultatov.

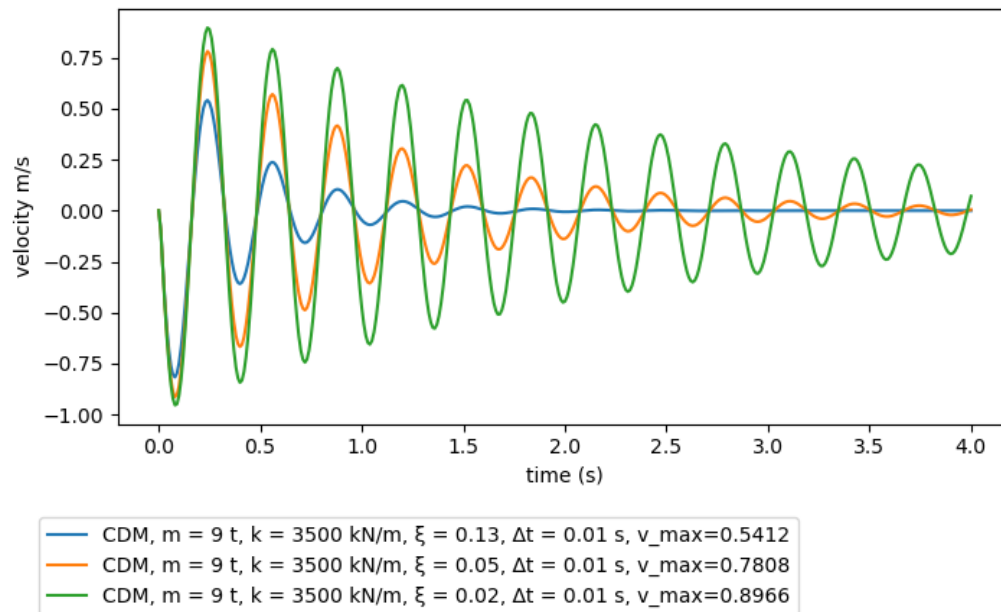


Slika 42: Zunanja obtežba pri lastnem nihanju.

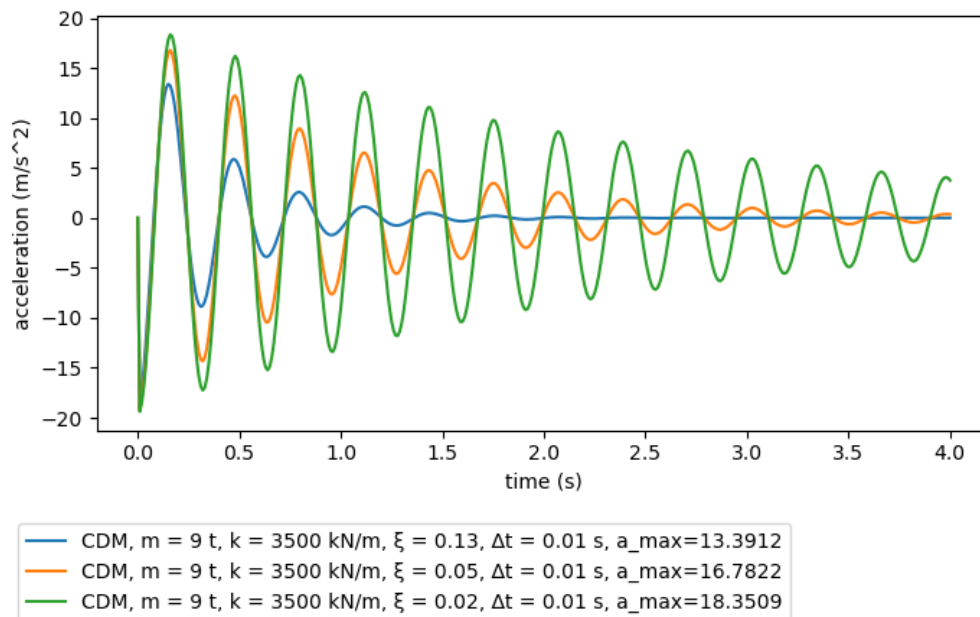


a)

Slika 43: Kinematične količine v odvisnosti od pri lastnem nihanju in treh različnih primerih dušenja: a) pomiki,
b) hitrost in c) pospeški. (»Se nadaljuje...«)

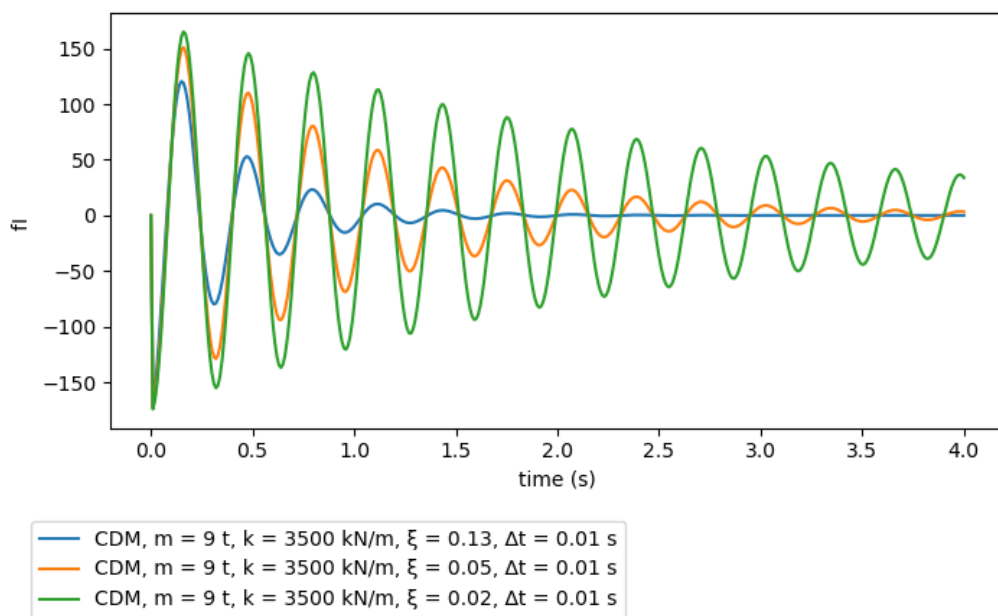


b)

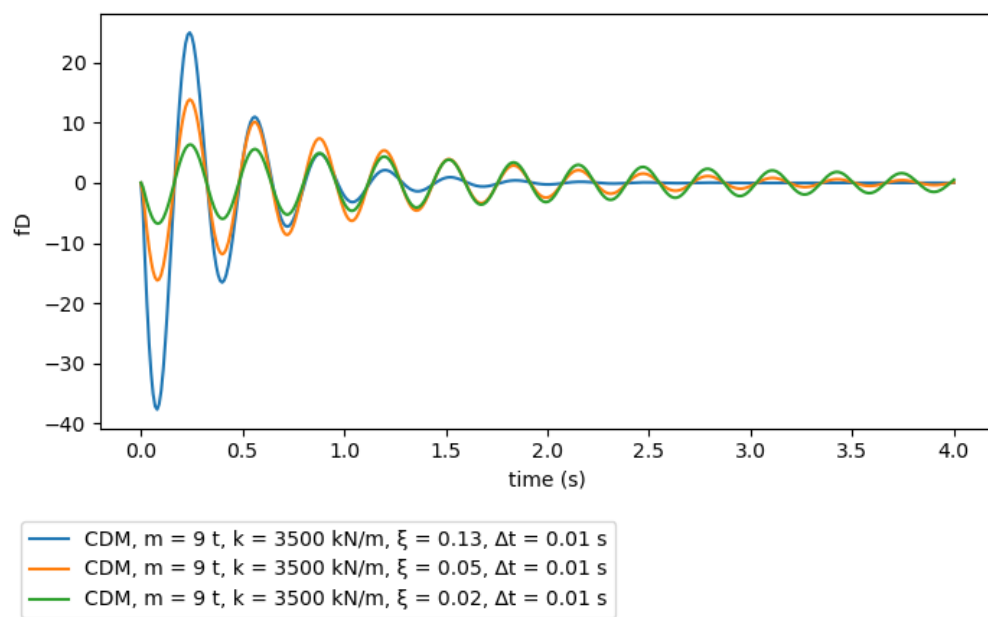


c)

Slika 43: Kinematične količine v odvisnosti od pri lastnem nihanju in treh različnih primerih dušenja: a) pomiki, b) hitrost in c) pospeški. (»...nadaljevanje.«)

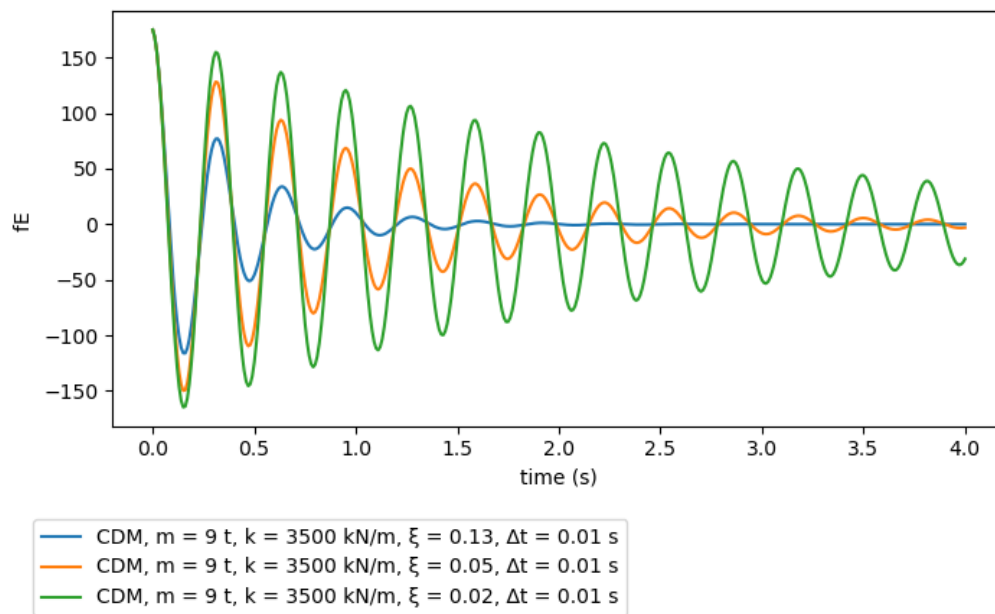


a)



b)

Slika 44: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za lastno nihanje: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. (»Se nadaljuje...«)



c)

Slika 44: Sile v enačbi gibanja v odvisnosti od časa za lastno nihanje: a) vztrajnostna sila, b) sila dušenja, c) notranja sila. (»...nadaljevanje.«)

6 SKLEP

V diplomski nalogi smo predstavili osnove teorije dinamike modela SDOF. Pri tem smo zapisali enačbo gibanja v različnih oblikah, pri čemer smo se osredotočili na reševanje problema, kjer so neznanke opredeljene z relativnimi kinematičnimi količinami. Predstavili smo možnosti reševanja enačbe gibanja za različne primere dinamične obtežbe. Za primer konstantne obtežbe in lastnega nihanja smo problem rešili analitično. Za splošno reševanje dinamičnega odziva konstrukcije smo predstavili dve numerični metodi za reševanje enačbe gibanja pri poljubni obtežbi, in sicer Newmarkovo metodo (Newmark, Nathan Martimore 1959) in metodo simetričnih diferenc. Poleg izpeljave enačb smo navedli tudi algoritme numeričnih metod, ki smo jih kasneje vključili v podprograme spletne aplikacije.

S ciljem, da bi kompleksno teorijo dinamičnih problemov, reševanje enačbe gibanja in razumevanje numerične integracije približali prihajajočim generacijam študentom, smo razvili spletno aplikacijo »Response!«. Programske skripte, ki v ozadju izvajajo analize, in program za prikazovanje grafov smo razvili v programskem jeziku Python, povezave med dinamičnim procesi spletne aplikacije pa smo zagotovili z uporabo jezikov PHP in JavaScript. Aplikacijo smo razvijali predvsem za študente, zato smo skušali izgled in funkcije uporabniškega vmesnika prilagajati potrebam ciljne skupine uporabnikov. Oblikovali smo torej uporabniški vmesnik v dveh jezikih z dodanimi razlagami osnovnih parametrov, omogočili shranjevanje rezultatov analiz, vezanih na unikatni URL, omogočili primerjave grafov več analiz hkrati in omogočili izvoz grafov v obliki slik. To je zahtevalo precej sprotnega dopolnjevanja, testiranja in modifikacij aplikacije. Način in namen uporabe spletne aplikacije smo prikazali tudi s testnimi primeri, ki predstavljajo zgolj nekatere od možnih problemov oziroma pedagoško zasnovanih nalog, katerih reševanje omogoča aplikacija. Pokazali smo, da je v dokaj kratkem času in z malo truda možno pripraviti več testnih primerov in izvajati primerjave med njimi. Študentje lahko tako že med predavanji prek telefonov gledajo rezultate izpeljav profesorja. Prvi testni primer prikazuje primerjavo med vplivi različnih komponent potresne obtežbe na isto konstrukcijo (dejansko preprosto konstrukcijo z različnimi togostmi v različnih). Z drugim testnim primerom smo pokazali vpliv velikosti integracijskega koraka na odziv konstrukcije v primerjavi s točno analitično rešitvijo. Prikazali smo, da prevelik integracijski korak ne da natančne rešitve. V tretjem primeru smo predstavili vpliv dušenja na lastno nihanje, primer omogoča, da si študentje lažje predstavljajo vpliv velikosti deleža kritičnega dušenja na nihanje konstrukcije.

Aplikacija je zasnovana tako, da omogoča kasnejše nadgradnje za razširitev uporabnosti. Dodali bi lahko nove primere iz dinamike konstrukcij ali dodatne numerične metode, kot so npr. Duhamelov integral, kolokacijska metoda ali Wilsonova- θ metoda. Aplikacija je pripravljena tako, da je omogočeno tudi preprosto dodajanje akceleroگرامov, kar bi lahko razširilo predvsem možnost opazovanja potresnih vplivov na konstrukcije in analizo vpliva različnih parametrov potresa na odziv. Tu bi lahko vpeljali še dodaten zavihek, kjer bi dobljene rezultate numeričnih analiz primerjali s spektri odzivov oziroma omogočali izračun za večje število akceleroگرامov in statistično obdelavo rezultatov. Dodali bi lahko tudi primerjavo med rezultati obravnavanega primera in splošno rešitvijo za vse vrste modela SDOF (npr. grafe dinamičnega faktorja, kot sta predstavljena primera v teoretičnih poglavjih, oziroma spektre pospeškov).

Z interdisciplinarnim pristopom, kjer smo povezali znanja iz dinamike konstrukcij in informacijske tehnologije, nam je uspelo posodobiti učenje in poučevanje dinamičnega odziva konstrukcij. Bodoče generacije študentov bodo lahko rezultate teoretičnih izpeljav preverjale in preučevale že na predavanjih, saj spletna aplikacije omogoča hitro izvedbo večjega števila numeričnih eksperimentov. S tem smo prihranili čas, ki ga lahko študent nameni razmisleku glede zasnove numeričnih eksperimentov. Na ta način bo lažje izpopolnil razumevanje različnih fenomenov, ki se pojavijo pri odzivu konstrukcij na dinamično obtežbo, ter dobil vpogled v natančnost numeričnih metod analize odziva konstrukcije pri dinamični obtežbi.

VIRI

Bootstrap (Front-End Framework). 2011. Bootstrap Core Team.
<https://getbootstrap.com/>. (Pridobljeno: 16. 4. 2022)

Canva. 2013. Canva Pty Ltd.
<https://www.canva.com/>. (Pridobljeno: 23. 3. 2022)

Cascading Style Sheets (CSS). 2022. World Wide Web Consortium (W3C).
<https://www.w3.org/TR/CSS/#css>. (Pridobljeno: 16. 4. 2022)

Chopra, A. K. 1995. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 2nd Edition. University of California at Berkley. Prentice-Hall, Inc.
<https://doi.org/10.1193/1.1586188>.

Dolšek, M., Šebenik, Ž., Klinc, R., Dolenc, M., Brozovič, M. 2015. Web Application for the Selection of Characteristic Ground Motions. V: Earthquake Geotechnical Engineering : Proceedings. 6th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, 1–9. Christchurch.

SIST EN 1998-1:2005 Evrokod 8 – Projektiranje potresnoodpornih konstrukcij – 1. del: Splošna pravila, potresni vplivi in pravila za stavbe.

Fajfar, P. 1984. Dinamika gradbenih konstrukcij. Ljubljana: Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo

HTML. 1993. WHATWG.
<https://html.spec.whatwg.org/>. (Pridobljeno 16. 4. 2022)

Klinc, R., Šebenik, Ž., Dolšek, M., Brozovič, M., Dolenc, M. 2019. A Web-Based System for the Selection of Characteristic Ground Motions. Advances in Engineering Software, 135.
<https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2019.102688>.

Kozak, J., Miran, Č. (ur.). 2008. Numerična Analiza. 1. Ljubljana: DMFA.

Newmark, N. M. 1959. A Method Of Computation For Structural Dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers.

Peruš, I., Klinc, R., Dolenc, M., Dolšek, M. 2012. A Web-Based Methodology for the Prediction of Approximate IDA Curves. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, št. 41: 1–18.
<https://doi.org/10.1002/eqe.2192>.

Python (Programming Language). 1991. Python Software Foundation.
<https://www.python.org/>. (Pridobljeno 12. 3. 2022)

Šebenik, Ž., Dolšek, M. 2016. Strong Ground Motion Database. Ljubljana: University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering, IKPIR.

Villaverde, R. 2009. Fundamental Concepts of Earthquake Engineering (1st Ed.). CRC Press.
<https://doi.org/10.1201/9781439883112>.

Žižmond, J., Šebenik, Ž., Vidrih, Z., Dolšek, M. 2020. Web Application for Determination of Risk-Targeted Seismic Action for Force-Based Seismic Design. 17th World Conference on Earthquake Engineering : September 13th to 18th 2020, Sendai, Japan, 1–12. Tokyo.

»Ta stran je namenoma prazna«

PRILOGA A.1: PREGLEDNICA ZA OPIS DELOVANJA SPLETNE APLIKACIJE

#	Opis koraka	Kje se izvede	Datoteka	Jezik	Rezultat
1	Uporabnik odpre spletno aplikacijo, ustvari se mu unikaten URL	Brskalnik		HTML (PHP)	
2	Uporabnik vnese podatke o konstrukciji (maso, togost in delež dušenja).	Brskalnik		HTML	
3	Izračunajo se ostali podatki o konstrukciji in se prikažejo v praznih poljih pod vnosom (koeficient dušenja, lastni nihajni čas in lastna krožna frekvenca)	Brskalnik		Javascript	
4	Uporabnik izbere vrsto obtežbe in glede na izbrano vrsto še dodatne podatke o obtežbi (za konstantno obtežbo, npr. velikost obtežbe in čas opazovanja)	Brskalnik		HTML/JavaScript	
5	Uporabnik izbere metodo analize (CDM ali Newmark, velikost integracijskega koraka in po potrebi še parametra β in γ)	Brskalnik		HTML	
6	Uporabnik pritisne gumb za izračun. Vneseni podatki se zapišejo v obliki slovarja in pošljejo na strežnik.	Brskalnik		HTML/JavaScript	
7	Podatke prebere »ustvarjalec_podatkov.py« in pripravi vektor obtežbe v odvisnosti od časa glede na izbran integracijski korak, vrsto in parametre obtežbe.	Strežnik	Api.calculation.php -> ustvarjalec_podatkov.py ->	PHP-> Python	{id}- input.json {id}- ustv_obtezba

(»Se nadaljuje...«)

(»...nadaljevanje.«)

#	Opis koraka	Kje se izvede	Datoteka	Jezik	Rezultat
8	Glede na izbrano metodo analize se požene program za numerično reševanje, ki za vhodne podatke uporabi izhodno datoteko prejšnjega koraka (»ustv_obtežba.json«), jo prebere s pomočjo zank, izvede izračune za vsak posamezni korak in pripravi izhodno datoteko v obliki slovarja, kjer se za vsak korak se pod indeks koraka zapišejo pripadajoči čas, pomik, hitrost, pospešek in velikosti posameznih sil, ki nastopajo v enačbi gibanja. Program »racun_analiticne.py« prebere vrsto obtežbe, če obstaja analitična rešitev za ta primer, jo pripravi.	Strežnik	racun_cdm.py ali racun_newmark.py In racun_analiticne.py	Python	{id}-output- numeric.json {id}-output- analitic.json
9	Pripravljene rezultate bere tudi funkcija za iskanje dinamičnega faktorja in maksimalnih kinematičnih količin, pripravi jih za izpis ob grafih.	Strežnik		Python	{id}-output- factors.json
10	Program »Graf.py« prebere datoteke z rezultati in jih izriše v obliki grafov (slike).	Strežnik	Graf.py	Python	{id}-graf- displacement .png ----
11	Rezultati se shranijo v tabelo v drugem zavihku, tabela je vezana na URL-uporabnika. V tabeli so zapisani za vsak primer tudi vneseni parametri s prve strani in oznaka za analitično rešitev, če ta obstaja (pri lastnem nihanju in konstantni obtežbi).	Strežnik	Graf.py	Python	

(»Se nadaljuje...«)

(»...nadaljevanje.«)

#	Opis koraka	Kje se izvede	Datoteka	Jezik	Rezultat
12	Uporabnik obkljuka primere, ki jih želi prikazati, in pritisne gumb za prikaz. Prikažejo se mu grafi kinematičnih količin, sil v enačbi gibanja in graf zunanje obtežbe (slednji predstavlja sicer vhodne podatke za numerične analize).	Brskalnik		PHP/ HTML/ JavaScript	
13	Pod grafi lahko uporabnik izbere še možnost za izvoz grafov. Te se mu izvozijo v obliki .zip datoteke.	Brskalnik /strežnik	Api.download.php	HTML + PHP	
14	Uporabnik lahko obkljukane rezultate po želji tudi izbriše iz lastne mape rezultatov.	Strežnik	Api.delete.php	PHP	
15	Za izvedbo nove analize ponovi postopek, za primerjave pri prikazu obkljuka več rezultatov hkrati.	Brskalnik /strežnik		HTML/ JavaScript / PHP/ Python	

»Ta stran je namenoma prazna.«