Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo

Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

Univerzitetni program Gradbeništvo,
Konstrukcijska smer

Kandidat:
Peter Češarek

Vpliv gibajočih se teles na gradbene konstrukcije

Diplomska naloga št.: 3027

Mentor:
izr. prof. dr. Dejan Zupan

Somentor:
prof. dr. Miran Saje

Ljubljana, 9. 9. 2008

Hvala za besede, hvala za stvari,
hvala za vprašaje in snovi;
hvala za tišino
in za vse kar naredi
da se duh ne poleni;
hvala Ti ker si!

Mira, Aleš, Marija, France, Jerneja, David, Polona, Gašper, Klara, Aleš, Nataša, Nina, Miran, Vanja, Andrej, Miran, Dejan in ostali... hvala da ste se kotalili z mano.

POPRAVKI

Stran z napako	Vrstica z napako	Namesto	Naj bo

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani PETER ČEŠAREK izjavljam, da sem avtor diplomske naloge z naslovom: »VPLIV GIBAJOČIH SE TELES NA GRADBENE KONSTRUKCIJE«.

Izjavljam, da se odpovedujem vsem materialnim pravicam iz dela za potrebe elektronske separatoteke FGG.

Ljubljana,

Podpis:____________________

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	**531/533+624.01(043.2)**
Avtor:	**Peter Češarek**
Mentor:	**doc. dr. Dejan Zupan**
Somentor:	**prof. dr. Miran Saje**
Naslov:	**Vpliv gibajočih se teles na gradbene konstrukcije**
Obseg in oprema:	**131 str., 12 pregl., 27 sl., 239 en.**
Ključne besede:	**kinematika, dinamika, kotaljenje brez podrsavanja, kotaljenje s podrsavanjem, let po zraku, trk s podlago, enačbe gibanja krogle, programiranje, paket Matlab, primeri, gibanje krogle**

Izvleček:

Izdelali smo matematični model gibanja togih teles po poljubnem togem reliefu ali konstrukciji v prostoru. Togo telo poljubne oblike smo nadomestili s kroglo in izpeljali enačbe osnovnih gibanj krogle: kotaljenje brez podrsavanja, kotaljenje s podrsavanjem, let po zraku in trk s podlago ter zapisali pogoje za prehode med njimi. Enačbe rešujemo numerično z metodami družine Runge-Kutta, vgrajenimi v programski paket *Matlab*. Napisali smo računalniški program, ki omogoča numerično reševanje enačb gibanja krogle po poljubnem reliefu ali konstrukciji. Program vključuje vse faze gibanja krogle in povezuje prehode med njimi, rezultate pa prikaže v obliki grafov in animacij v trirazsežnem prostoru. Numerično reševanje smo preverili na primeru ravninskega gibanja, za katerega poznamo analitične rešitve. Uporaba programa je prikazana na primerih gibanja krogle po vodnem toboganu in gibanja skalnih gmot na strmem pobočju.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDC:	**531/533+624.01(043.2)**
Author:	**Peter Češarek**
Supervisor:	**assist. prof. dr. Dejan Zupan**
Co-supervisor:	**prof. dr. Miran Saje**
Title:	**Impact of moving bodies on structures**
Notes:	**131 p., 12 tab., 27 fiq., 239 eq.**
Key words:	**kinematics, dynamics, rolling, sliding, flying in the air, collision with ground, equations of motion of sphere, programming, Matlab environment, examples, motion**

Abstract

Mathematical model of rigid body motion on a rigid rough surface or structure in space is developed. Rigid bodies of different shapes are replaced with a sphere. The equations of fundamental modes of motion of a rigid sphere, i.e. rolling, sliding, flying in the air and collision are given, as well as switching conditions from one phase to another. The equations are solved numericaly with Runge-Kutta methods provided by $Matlab$. The computer code in the $Matlab$ environment is made. Program is capable of including all types of motion and switching between different phases. The results are shown in a form of diagrams and animations. The numerical solution is verified against the plane motion example, which is analytically solutable. The applications consist of examples of sphere motion on a water slide and motion of rock masses on a steep slope.

KAZALO VSEBINE

KAZALO PREGLEDNIC

KAZALO SLIK

1 UVOD

1.1 Motivacija

Gradbene konstrukcije so v svoji življenjski dobi izpostavljene različnim obtežbam. Med najbolj nepredvidljive spadajo vplivi raznih gibajočih se teles, npr. vozil, skalnih gmot, skupin ljudi, sosednjih konstrukcij. Gibanje takih teles v prostoru, po okolici konstrukcije (reliefu) in po sami konstrukciji je lahko sestavljeno iz kotaljenja, drsenja, prostega leta in trkov s podlago in konstrukcijo. Običajno je gibanje telesa kombinacija vseh teh gibanj.

Zanimata nas tako vpliv gibajočega se telesa na konstrukcijo in tudi kako oblika konstrukcije ali reliefa vplivata na gibanje telesa. V nalogi izpeljemo in fizikalno opišemo enačbe posameznega tipa gibanja teles ter pogoje za zaključek in vključitev posamezne faze gibanja. Enačbe trirazsežnega gibanja z upoštevanjem sodelovanja podlage (drsenja, kotaljenja po podlagi in trka s podlago), zračnega upora in vetra so, kljub nekaterim fizikalno dopustnim poenostavitvam, prezahtevne, da bi jih lahko rešili analitično. Rešujemo jih numerično z metodami družine Runge-Kutta, vgrajenimi v programski paket *Matlab*. Nato izdelamo program, ki povezuje posamezne faze gibanja in rezultate prikaže z animacijami v trirazsežnem prostoru. Osnovni namen naloge je modelirati vpliv trka teles na gradbene konstrukcije. S parametričnimi študijami želimo preučevati vpliv reliefa, geometrije objekta in števila objektov za zaščito pred zunanjimi vplivi pri učinkih gibajočih se teles različnih mas in velikosti.

1.2 Predpostavke

Opis gibanja deformabilnega telesa po deformabilni podlagi je zelo zahteven. Večinoma pa so deformacije podlage in konstrukcije tako majhne, da jih lahko pri ugotavljanju vpliva zanemarimo. Zato se v nalogi omejujemo na gibanje togih teles po togi podlagi. Podlaga je lahko poljubno oblikovan relief in konstrukcija ima lahko poljubno geometrijo v prostoru.

Toga telesa poljubnih oblik se s podlago lahko stikajo v eni sami točki, to velja za telesa z gladko zaobljeno površino, največkrat pa se telo stika s podlago z območjem površine. Telesa z gladko zaobljeno površino se po podlagi lahko kotalijo ali drsijo, telesa z oglatimi robovi pa po podlagi lahko drsijo, medtem ko je kotaljenje nadomeščeno z zaporedjem trkov vogalnih delcev robu s podlago. Analiza gibanja togih teles povsem poljubne, negladke oblike presega obseg tega dela. V tej nalogi vzamemo, da ima telo najbolj preprosto obliko – kroglo s polmerom *a* (v nadaljevanju tudi kroglica). Predpostavimo, da se kroglica (v fazi kotaljenja in trka) s podlago stika samo v eni točki.

Izraz *telo* (*togo telo*) v nadaljnjih poglavjih uporabljamo na mestih, kjer enačbe in principi veljajo za togo telo poljubne oblike, kjer pa je veljavnost omejena na kroglo, uporabljamo izraz *krogla* (*kroglica*).

1.3 Načrt dela

Motivacija in omejitve, podane v uvodu, našo nalogo dovolj natančno definirajo, da se lahko lotimo izpeljav. Pred tem je dobro, da pripravimo načrt dela, ki sledi uveljavljenemu pristopu reševanja mehanskih nalog: kinematika – sile – enačbe gibanja – reševanje – analiza.

Najprej vpeljemo koordinatne sisteme. Nepomični prostorski koordinatni sistem in pomični telesni koordinatni sistem sta nepogrešljiva za opis gibanja kateregakoli telesa. Z namenom, da čim lažje zapišemo gibalne enačbe, pa vpeljemo še tretji, prav tako pomični koordinatni sistem, ki kar najbolje upošteva dejstvo, da se obravnavano telo giblje po poljubni podlagi. Izbiri koordinatnih sistemov sledi določitev baznih vektorjev in zvez med njimi. Nato določimo odvode baznih vektorjev po času, vpeljemo pojme kotnih hitrosti obeh pomičnih koordinatnih sistemov ter zapišemo krajevne vektorje in vektorje hitrosti.

V drugem koraku zapišemo izraze za vektorje zunanjih sil, ki delujejo na telo in izračunamo momente teh sil na težišče. Oboje potrebujemo za zapis gibalnih enačb, ki ga opravimo v tretjem koraku.

Gibanje teles vodita izreka o gibalni in vrtilni količini. Zapišemo ju splošno, v obliki, ki velja za vse vrste gibanja. Na tem mestu se naloga razcepi na analizo posamezne vrste gibanja: kotaljenje, podrsavanje, let po zraku in trk s podlago. Gibalne enačbe zapišemo za vsako vrsto gibanja posebej, dodamo pa jim še kinematične vezi, ki podrobneje opišejo, za katero vrsto gibanja gre. Nadalje sledimo začetni odločitvi, da enačbe rešujemo z numeričnimi metodami, zato jih zapišemo v obliki, primerni za reševanje v *Matlab*-u. V primerih, ko so enačbe dovolj preproste, rešitve poiščemo v analitični obliki.

V sklopu izpeljav opravimo še zadnji korak, v katerem zapišemo pogoje za zaključek posamezne faze gibanja in pogoje za začetek nove.

S tem je matematični opis problema končan, ostane še drugi, zelo pomemben del naloge, kjer pripravimo programsko okolje, ki omogoča rešitev izpeljanih enačb. Tako dobi naloga uporabno vrednost, hkrati pa računalniški rezultati omogočajo preverjanje natančnosti računskega modela. Numerično reševanje podkrepimo s tridimenzionalnimi animiranimi prikazi gibanja.

2 KINEMATIKA IN DINAMIKA

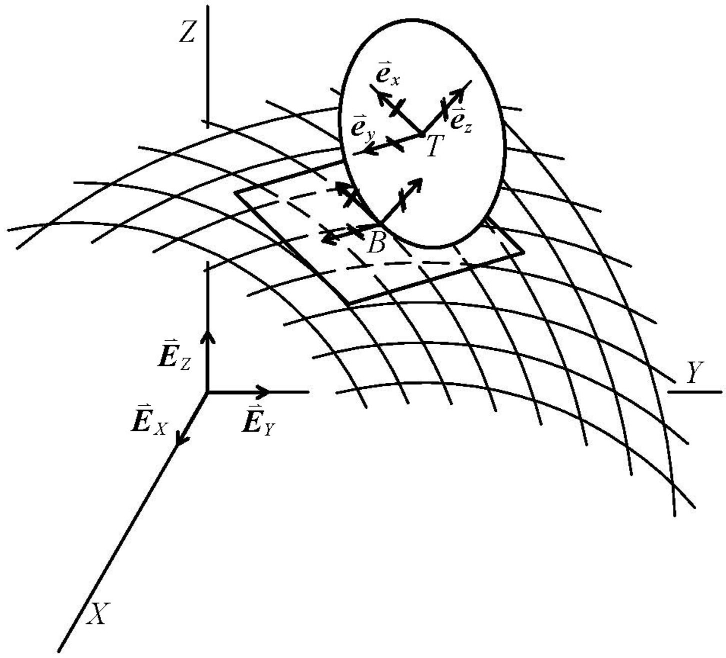
2.1 Kinematika

2.1.1 Koordinatni sistemi

V evklidski trirazsežni prostor postavimo nepomični kartezični **prostorski koordinatni sistem** (ali globalni koordinatni sistem) (X, Y, Z) z izhodiščem O v izbrani točki in z baznimi vektorji $(\boldsymbol{E}_X, \boldsymbol{E}_Y, \boldsymbol{E}_Z)$. Orientiramo ga tako, da je bazni vektor $\boldsymbol{E}_Z$ nasproten delovanju sile teže, bazna vektorja $\boldsymbol{E}_X$ in $\boldsymbol{E}_Y$ pa napenjata vodoravno ravnino. Ob tej izbiri je potrebno omeniti, da je območje gibanja dovolj majhno, da je smer delovanja sile teže na tem območju konstantna. S prostorskimi koordinatami je opisana podlaga (relief), z njimi opišemo lego težišča telesa, merimo dejanske razdalje ter premike in zasuke telesa glede na prostor.

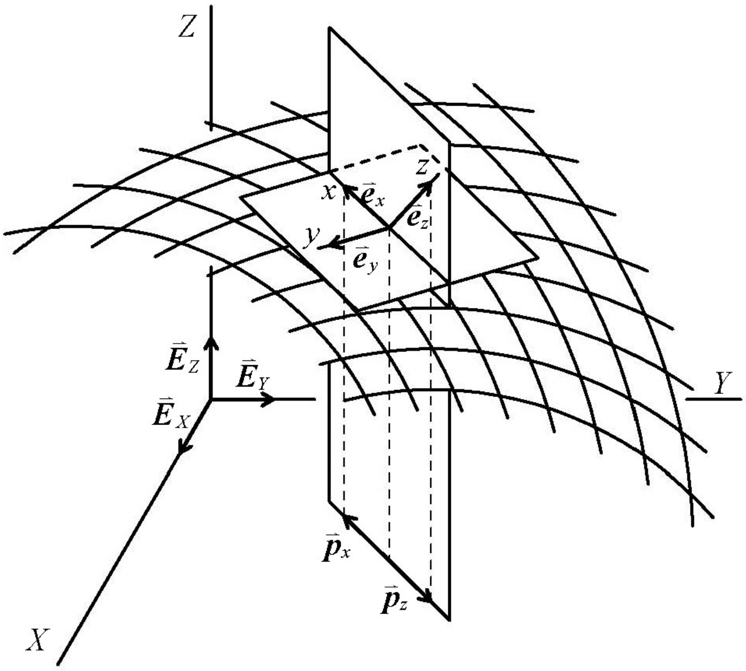
Na telo pripnemo **telesni**, ravno tako kartezični **koordinatni sistem** (tudi lokalni koordinatni sistem) (ξ, η, ζ), z baznimi vektorji $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ in z izhodiščem O' v težišču. Lega telesnega koordinatnega sistema glede na telo se med gibanjem ne spreminja, zato se lega delcev glede na telesni koordinatni sistem med gibanjem ne spreminja. Ravno dejstvo, da ima vsak delec v telesnem koordinatnem sistemu konstantne lokalne koordinate, s pridom izkoristimo pri zaznavanju posebnih dogodkov (npr. pri trku s podlago).

Izbiro še tretjega koordinatnega sistema narekuje namen, da z njim čim bolj preprosto zapišemo gibalne enačbe (predvsem v fazi kotaljenja in trka s podlago). Zato je že na tem mestu dobro, da se ozremo na definicije izrekov o gibalni in vrtilni količini. Izrek o gibalni količni pravi, da je odvod gibalne količine enak vsoti vseh (zunanjih) sil na telo. Med temi silami je tudi reakcijska sila podlage, ki jo v fazi kotaljenja razstavimo na silo trenja in normalno silo podlage. Sila trenja, ki deluje na stiku telesa s podlago, ob vsakem času in v vsaki legi telesa leži na tangentni ravnini na ploskev kotaljenja v točki dotikališča. Normalna sila podlage pa se ujema z normalo tangentne ravnine v točki dotikališča. Zapis reakcij podlage, s tem pa tudi izrekov o gibalni in vrtilni količini, bo torej najbolj preprost, če tretji koordinatni sistem (v katerem bomo izreka zapisali) izberemo tako, da bo par pravokotnih osi vzporeden s tangentno ravnino v točki dotikališča, tretja os pa vzporedna z normalo tangentne ravnine (slika 1).



Slika 1: Prostorski koordinatni sistem, izbira tretjega koordinatnega sistema.

Tretji koordinatni sistem poimenujemo kar **izbrani koordinatni sistem** z osmi (x, y, z) in baznimi vektorji $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$. Izhodišče O'' izbranega koordinatnega sistema je zopet v težišču telesa, osi x in y ležita na tangentni ravnini na ploskev v točki dotikališča telesa s podlago, os z se pri tem ujema z normalo tangentne ravnine, bazni vektor $\boldsymbol{e}_z$ pa je usmerjen v smeri pozitivne (zunanje) normale na ploskev kotaljenja. Bazni vektor $\boldsymbol{e}_x$ naj bo usmerjen tako, da je njegova projekcija na vodoravno ravnino, $\boldsymbol{p}_x$, usmerjena nasprotno od projekcije $\boldsymbol{p}_z$ baznega vektorja $\boldsymbol{e}_z$ na ravnino (X, Y). Povedano drugače, osi x in z ležita v vertikalni ravnini, ki je ves čas gibanja pravokotna na vodoravno ravnino, presečna premica obeh ravnin (navpične in vodoravne) pa je pri tem nosilka projekcij obeh osi na vodoravno ravnino (slika 2). Smer baznega vektorja $\boldsymbol{e}_y$ pa določa desnosučna orientiranost izbranega triroba: $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x$. Ker $\boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_z$ ležita v vertikalni ravnini, je bazni vektor $\boldsymbol{e}_y$ oziroma os y kar vzporedna z ravnino (X, Y).

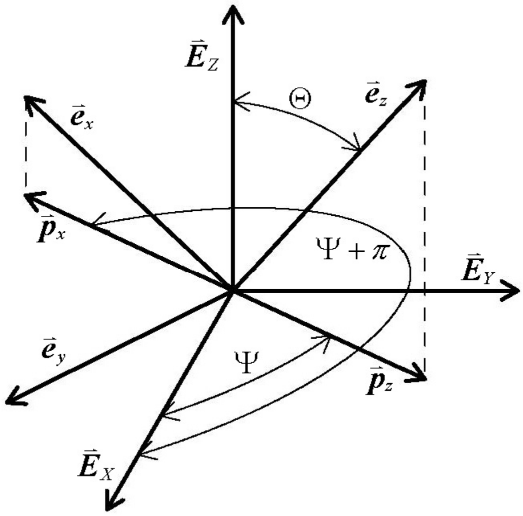


Slika 2: Prostorski koordinatni sistem. Določitev lege izbranega koordinatnega sistema v točki dotikališča telesa in podlage.

2.1.2 Zveze med koordinatnimi sistemi

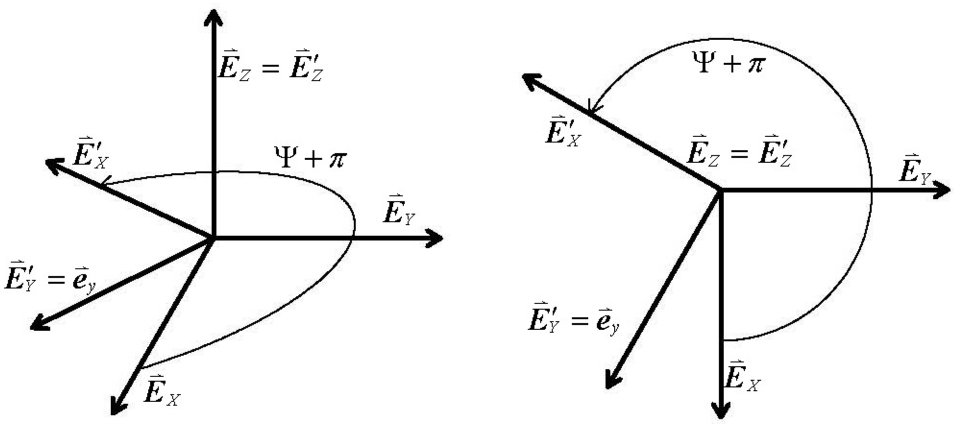
Kadar uporabljamo več koordinatnih sistemov, potrebujemo zveze med njimi. Podajamo jih že tukaj, še pred začetkom samih izpeljav. Osnovno idejo zapisa zvez med različnimi kartezičnimi koordinatnimi sistemi si sposodimo od Eulerja, ki je pokazal, da lahko pravokotni koordinatni sistem zavrtimo v drugega, prav tako pravokotnega, s tremi zaporednimi zasuki (odvisno od dejanske lege koordinatnih sistemov pa je teh zasukov lahko tudi manj). Legi izbranega in telesnega sistema v prostoru se sicer s časom spreminjata, izpeljane zveze pa veljajo pri vsakem fiksnem času.

Lega izbranega koordinatnega sistema glede na globalni koordinatni sistem je natančno znana iz definicije. Projekcijo normale tangentne ravnine (oziroma baznega vektorja $\boldsymbol{e}_z$) na vodoravno ravnino (X, Y) označimo s $\boldsymbol{p}_z$. Kot, ki ga vektor $\boldsymbol{p}_z$ oklepa z globalno osjo X, označimo s Ψ. Projekcija baznega vektorja $\boldsymbol{e}_x$ na ravnino (X, Y), to je $\boldsymbol{p}_x$, ki je po definiciji nasprotno usmerjena od vektorja $\boldsymbol{p}_z$, potem z globalno osjo X oklepa kot $\Psi + \pi$. Kot, ki ga bazni vektor $\boldsymbol{e}_z$ oklepa s prostorsko osjo Z, označimo s Θ.



Slika 3: Prostorski in izbrani koordinatni sistem. Kota Ψ in Θ.

Zapis zveze med prostorskim in izbranim koordinatnim sistemom je sedaj preprost. Zato da si zvezo lažje predstavljamo, globalni koordinatni sistem translatorno prestavimo v težišče telesa (translacijski premik ne vpliva na velikost zasukov oziroma kotov Ψ in Θ), tako da imata oba sistema skupno izhodišče (slika 3).



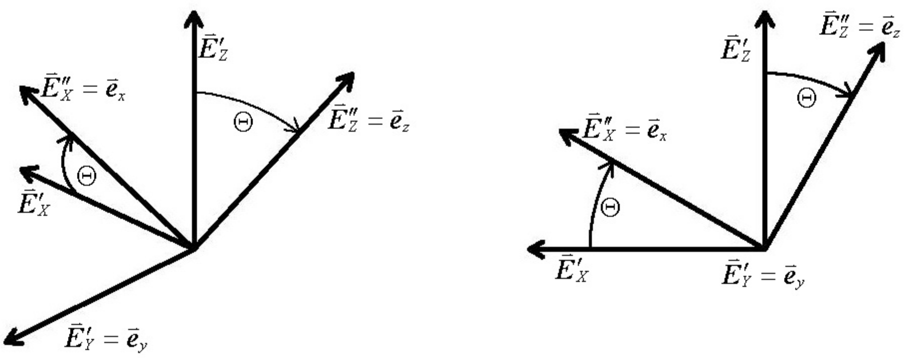
Slika 4: Zasuk prostorskega koordinatnega sistema okrog osi E_Z.

Če prostorski koordinatni sistem zasukamo v pozitivni smeri okrog globalne osi Z za kot $\Psi+\pi$, os X oziroma bazni vektor $\boldsymbol{E}_X$ sovpade s smerjo projekcije baznega vektorja $\boldsymbol{e}_x$ na vodoravno ravnino (slika 4). Zasukani vektor $\boldsymbol{E}_Y$, označimo ga z $\boldsymbol{E}_Y'$, s tem zasukom postane pravokoten na projekciji $\boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_z$ na vodoravno ravnino (s tem pa tudi na vektorja $\boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_z$).

Rotirani vektor $\boldsymbol{E}_Y$ se torej kar ujame z baznim vektorjem $\boldsymbol{e}_y$. Opisani zasuk zapišemo še z matrično enačbo:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}'_X \\ \boldsymbol{E}'_Y \\ \boldsymbol{E}'_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi+\pi) & \sin(\Psi+\pi) & 0 \\ -\sin(\Psi+\pi) & \cos(\Psi+\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -\cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & -\cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix}. \tag{2.01}$$

Vektorja $\boldsymbol{E}_Y'$ in $\boldsymbol{E}_Z'$ nato zasukamo za kot Θ v negativni smeri okrog vektorja $\boldsymbol{E}_Y' = \boldsymbol{e}_y$. Vektor $\boldsymbol{E}_Z'$ pri tem sovpade z normalo tangentne ravnine $\boldsymbol{e}_z$ oziroma z osjo z, vektor $\boldsymbol{E}_X'$ pa z baznim vektorjem $\boldsymbol{e}_x$ oziroma z osjo x (slika 5).



Slika 5: Zasuk okrog osi e_y.

Matrična zveza, ki pripada temu zasuku baznih vektorjev, je določena z enačbo:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}''_X \\ \boldsymbol{E}''_Y \\ \boldsymbol{E}''_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\Theta) & 0 & -\sin(-\Theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\Theta) & 0 & \cos(-\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}'_X \\ \boldsymbol{E}'_Y \\ \boldsymbol{E}'_Z \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}'_X \\ \boldsymbol{E}'_Y \\ \boldsymbol{E}'_Z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}'_X \\ \boldsymbol{E}'_Y \\ \boldsymbol{E}'_Z \end{bmatrix}. \tag{2.02}$$

Zveza med izbranim in globalnim koordinatnim sistemom je z opisanima zasukoma že natančno določena. Po množenju matrik $\mathbf{Q}_1$ in $\mathbf{Q}_2$ dobimo še matrični zapis zveze:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}''_X \\ \boldsymbol{E}''_Y \\ \boldsymbol{E}''_Z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_2\,\mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix}, \tag{2.03}$$

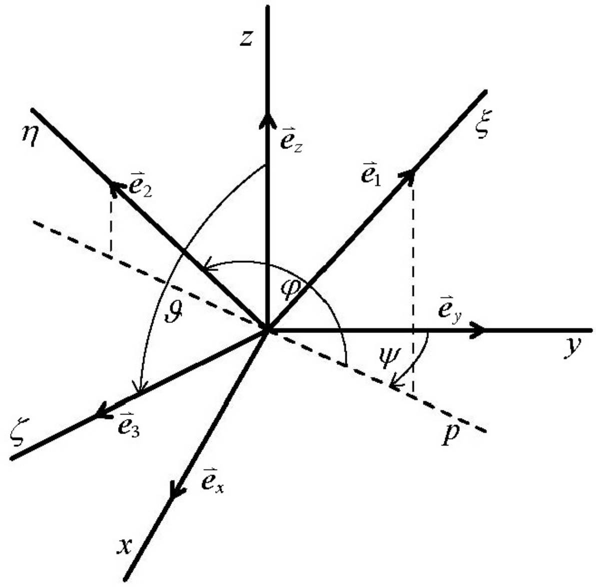
$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -\cos\Psi\cos\Theta & -\sin\Psi\cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Psi & -\cos\Psi & 0 \\ \cos\Psi\sin\Theta & \sin\Psi\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}. \tag{2.04}$$

Matrika $\mathbf{R}_1$, ki povezuje obe trojici vektorjev, je prava ortogonalna matrika, saj zanjo velja: $\mathbf{R}_1\,\mathbf{R}_1^{\mathrm{t}} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{R}_1^{\mathrm{t}}$, $\det\mathbf{R}_1 = 1$. Obrnjeno zvezo med prostorskim in izbranim koordinatnim sistemom tako preprosto dobimo z

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}. \tag{2.05}$$

Tretjega zasuka pri iskanju zveze med izbranim in prostorskim koordinatnim sistemom nismo potrebovali. Odgovor na vprašanje zakaj? je preprost; tretja vez med koordinatnima sistemoma se skriva v dejstvu, da smo izbrani koordinatni sistem povezali s tangentno ravnino na ploskev kotaljenja v točki dotikališča, kar nam narekuje, da zapišemo še zvezo med kotoma Ψ in Θ ter ploskvijo kotaljenja oziroma tangentno ravnino. To storimo kasneje, a pred tem je smiselno, da poiščimo še zvezo med telesnim in izbranim koordinatnim sistemom.

Telesni koordinatni sistem se vrti skupaj s telesom in lahko v danem trenutku opazovanja glede na izbrani koordinatni sistem zavzema poljubno lego, kar nam pove, da bomo za iskanje zveze potrebovali tri zasuke. Odločimo se, da zvezo poiščemo enako kot Euler, za njim pa še mnogi drugi (slika 6).



Slika 6: Izbrani in telesni koordinatni sistem. Eulerjevi zasuki.

Izbrani koordinatni sistem najprej zavrtimo v pozitivni smeri okrog osi z za kot ψ; tako zavrtene osi in bazne vektorje označimo s ($'$):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \\ \boldsymbol{e}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_3 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}. \tag{2.06}$$

Dobljeni koordinatni sistem $(x', y', z'=z)$ nato zasukamo v pozitivni smeri okrog osi y' za kot ϑ; zavrtene osi in bazne vektorje označimo s ($''$)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}''_x \\ \boldsymbol{e}''_y \\ \boldsymbol{e}''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \\ \boldsymbol{e}'_z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_4 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \\ \boldsymbol{e}'_z \end{bmatrix}. \tag{2.07}$$

Zadnji Eulerjev zasuk je okrog zavrtene osi z, to je okrog z'', za kot φ v pozitivni smeri:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'''_x \\ \boldsymbol{e}'''_y \\ \boldsymbol{e}'''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}''_x \\ \boldsymbol{e}''_y \\ \boldsymbol{e}''_z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_5 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}''_x \\ \boldsymbol{e}''_y \\ \boldsymbol{e}''_z \end{bmatrix}. \tag{2.08}$$

Dobljeni sistem (x''', y''', z''') se ujema s telesnim koordinatnim sistemom (ξ, η, ζ). Z množenjem matrik $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_4$ in $\mathbf{Q}_3$ dobimo zvezo med baznimi vektorji telesnega in izbranega koordinatnega sistema

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x''' \\ \boldsymbol{e}_y''' \\ \boldsymbol{e}_z''' \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_5\,\mathbf{Q}_4\,\mathbf{Q}_3 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}. \tag{2.09}$$

Matrika $\mathbf{R}_2$ je prava ortogonalna, saj tudi zanjo velja: $\mathbf{R}_2\,\mathbf{R}_2^{\mathrm{t}} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{R}_2^{\mathrm{t}}$, $\det \mathbf{R}_2 = 1$. Zaradi dolžine izrazov za komponente jo zapišimo v komponentni obliki:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{R}_{2,11} & \mathrm{R}_{2,12} & \mathrm{R}_{2,13} \\ \mathrm{R}_{2,21} & \mathrm{R}_{2,22} & \mathrm{R}_{2,23} \\ \mathrm{R}_{2,31} & \mathrm{R}_{2,32} & \mathrm{R}_{2,33} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{R}_{2,11} = \cos\psi \cos\vartheta \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi,$$
$$\mathrm{R}_{2,12} = \sin\psi \cos\vartheta \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi,$$
$$\mathrm{R}_{2,13} = -\sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$\mathrm{R}_{2,21} = -\cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi,$$
$$\mathrm{R}_{2,22} = -\sin\psi \cos\vartheta \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi,$$
$$\mathrm{R}_{2,23} = \sin\vartheta \sin\varphi,$$

$$\mathrm{R}_{2,31} = \cos\psi \sin\vartheta,$$
$$\mathrm{R}_{2,32} = \sin\psi \sin\vartheta,$$
$$\mathrm{R}_{2,33} = \cos\vartheta.$$

Tudi za obrnjeno zvezo med izbranim in telesnim koordinatnim sistemom velja preprosta enačba:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Ob koncu zapišimo še zvezo med telesnim in prostorskim koordinatnim sistemom. Dobimo jo z množenjem matrik $\mathbf{R}_2$ in $\mathbf{R}_1$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2\,\mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3 \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

$\mathbf{R}_3$ je kot produkt dveh tudi sama prava ortogonalna matrika. Tudi njene komponente imajo zapleteno obliko:

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} R_{3,11} & R_{3,12} & R_{3,13} \\ R_{3,21} & R_{3,22} & R_{3,23} \\ R_{3,31} & R_{3,32} & R_{3,33} \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
R_{3,11} &= -\cos\Psi \sin\Theta \sin\vartheta \cos\varphi + \sin\Psi\left(\cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\vartheta \cos\varphi\right) - \\
&\quad -\cos\Psi \cos\Theta\left(\cos\psi \cos\vartheta \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi\right), \\
R_{3,12} &= -\sin\Psi \sin\Theta \sin\vartheta \cos\varphi - \cos\Psi\left(\cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\vartheta \cos\varphi\right) - \\
&\quad -\sin\Psi \cos\Theta\left(\cos\psi \cos\vartheta \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi\right), \\
R_{3,13} &= -\cos\Theta \sin\vartheta \cos\varphi + \sin\Theta\left(\cos\psi \cos\vartheta \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{3,21} &= \cos\Psi \sin\Theta \sin\vartheta \sin\varphi + \sin\Psi\left(\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\vartheta \sin\varphi\right) + \\
&\quad +\cos\Psi \cos\Theta\left(\cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi\right), \\
R_{3,22} &= \sin\Psi \sin\Theta \sin\vartheta \sin\varphi - \cos\Psi\left(\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\vartheta \sin\varphi\right) + \\
&\quad +\sin\Psi \cos\Theta\left(\cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi\right), \\
R_{3,23} &= \cos\Theta \sin\vartheta \sin\varphi - \sin\Theta\left(\cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{3,31} &= -\cos\Psi \cos\Theta \cos\psi \sin\vartheta + \cos\Psi \sin\Theta \cos\vartheta + \sin\Psi \sin\psi \sin\vartheta, \\
R_{3,32} &= -\sin\Psi \cos\Theta \cos\psi \sin\vartheta + \sin\Psi \sin\Theta \cos\vartheta - \cos\Psi \sin\psi \sin\vartheta, \\
R_{3,33} &= \sin\Theta \cos\psi \sin\vartheta + \cos\Theta \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Spreminjanje baznih vektorjev prostorskega koordinatnega sistema s telesnimi nam pove matrika $\mathbf{R}_3^{\mathsf{T}}$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_X \\ \boldsymbol{E}_Y \\ \boldsymbol{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

2.1.3 Ploskev kotaljenja

O neravni podlagi oziroma ploskvi, po kateri se telo kotali, nad njo leti ali ob katero trči, smo do sedaj govorili, v nadaljevanju pa jo moramo ustrezno matematično opisati.

Ploskev naj bo podana v eksplicitni obliki:

$$Z = f\left(X, Y\right). \tag{2.15}$$

Pri tem naj bo funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva po spremenljivkah X in Y. Prve odvode potrebujemo že v naslednjem koraku, ko določamo enačbo normale tangentne ravnine, druge pa nekoliko kasneje.

Enačbo normale na ploskev kotaljenja določimo z izrazom

$$\boldsymbol{e}_N = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2}} \begin{bmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

kjer sta naklonska koeficienta tangentne ravnine k_1 in k_2 določena z izrazoma

$$k_1 = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad k_2 = \frac{\partial Z}{\partial Y}. \tag{2.17}$$

Pozitivno orientirana normala je tista, ki ima pozitivno koordinato v smeri osi Z. To je tudi normala, katere smer se ujema z baznim vektorjem $\boldsymbol{e}_z$ izbranega koordinatnega sistema:

$$\boldsymbol{e}_N = \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2}} \left(-k_1 \boldsymbol{E}_X - k_2 \boldsymbol{E}_Y + \boldsymbol{E}_Z\right) = \boldsymbol{e}_z. \tag{2.18}$$

Ko poznamo enačbo normale tangentne ravnine, lahko poiščemo zvezo med naklonskimi koeficienti tangentne ravnine ter kotoma Ψ in Θ. Enotski vektor projekcije normale tangentne ravnine na ravnino (X, Y) lahko zapišemo kot

$$\boldsymbol{e}_p = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left(-k_1 \boldsymbol{E}_X - k_2 \boldsymbol{E}_Y\right). \tag{2.19}$$

Kot, ki ga $\boldsymbol{e}_p$ oklepa z globalno osjo X, smo označili s Ψ. Potem je

$$\boldsymbol{e}_p = \cos\Psi\,\boldsymbol{E}_X + \sin\Psi\,\boldsymbol{E}_Y. \tag{2.20}$$

Združeni enačbi (2.19) in (2.20) povesta, kako je kot Ψ povezan z naklonskimi koeficienti tangentne ravnine:

$$\cos\Psi = \frac{-k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \qquad \sin\Psi = \frac{-k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}. \tag{2.21}$$

Normala na ploskev kotaljenja v točki dotikališča oklepa z globalno osjo Z kot Θ. Določimo ga lahko kar iz skalarnega produkta:

$$\boldsymbol{e}_N \cdot \boldsymbol{E}_Z = \frac{1}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}}\left(-k_1\boldsymbol{E}_X - k_2\boldsymbol{E}_Y + \boldsymbol{E}_Z\right)\cdot \boldsymbol{E}_Z = \frac{1}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}} = \cos\Theta. \tag{2.22}$$

Potem velja:

$$\cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}}, \qquad \sin\Theta = \frac{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}} \tag{2.23}$$

oziroma

$$\tan\Theta = \sqrt{k_1^2+k_2^2}. \tag{2.24}$$

Če enačbo (2.24) upoštevamo v enačbah (2.21), dobimo manjkajočo zvezo med kotoma Ψ in Θ in naklonskima koeficientoma ploskve kotaljenja:

$$k_1 = -\cos\Psi\tan\Theta, \qquad k_2 = -\sin\Psi\tan\Theta. \tag{2.25}$$

2.1.3.1 Relief podan z množico točk

Relief ali konstrukcijo le v posebnih, enostavnih primerih lahko zapišemo z eno samo funkcijo $Z = f(X,Y)$. Bolj pogosta je situacija, ko iz geometerskih meritev poznamo (globalne) koordinate množice točk reliefa, obliko reliefa med točkami pa predpostavimo oziroma določimo s pomočjo interpolacijskih funkcij, tako da se kar najbolj ujema z realno obliko. V podrobnosti interpolacije se v tem delu ne spuščamo. V primerih uporabimo orodje "Spline Toolbox", ki je del programskega paketa *Matlab*. Pri uporabi orodja moramo biti pazljivi, da so za interpolacijo uporabljene dvakrat zvezno odvedljive funkcije.

2.1.4 Odvodi baznih vektorjev po času in vektorji kotnih hitrosti

V gibalnih enačbah nastopata časovna odvoda vektorjev gibalne in vrtilne količine. Oba bomo zapisali v izbranem – pomičnem koordinatnem sistemu. Za račun odvodov vektorjev v pomičnem koordinatnem sistemu nam je dobro znan obrazec

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega}_g \times \boldsymbol{p}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{rel}} = \dot{p}_1\boldsymbol{g}_1 + \dot{p}_2\boldsymbol{g}_2 + \dot{p}_3\boldsymbol{g}_3. \tag{2.26}$$

Izraz (2.26) pove, da je absolutni odvod vektorja, zapisanega v pomičnem koordinatnem sistemu, enak vsoti relativnega odvoda, ki upošteva samo spreminjanje vektorja relativno glede na pomični koordinatni sistem, in sistemskega odvoda, ki izvira iz vrtenja baznih vektorjev pomičnega sistema, v katerem je vektor zapisan. Vrtenje baznih vektorjev pomičnega koordinatnega sistema $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ opišemo z vektorjem kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}_g$ tega sistema, ki ga dobimo z odvajanjem baznih vektorjev po času.

Prostorski koordinatni sistem je nepomičen, zato so odvodi njegovih baznih vektorjev po času enaki nič,

$$\dot{\boldsymbol{E}}_X = \boldsymbol{0}, \qquad \dot{\boldsymbol{E}}_Y = \boldsymbol{0}, \qquad \dot{\boldsymbol{E}}_Z = \boldsymbol{0}, \tag{2.27}$$

časovni odvodi vektorjev, zapisanih v tem sistemu, pa so kar enaki relativnim odvodom.

Izraze za določitev časovnih odvodov obeh pomičnih koordinatnih sistemov določimo z direktnim odvajanjem zvez med koordinatnimi sistemi.

Odvode baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema določimo z odvajanjem izraza (2.03) po času:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_X\\ \boldsymbol{E}_Y\\ \boldsymbol{E}_Z\end{bmatrix}\right) = \dot{\mathbf{R}}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_X\\ \boldsymbol{E}_Y\\ \boldsymbol{E}_Z\end{bmatrix} + \mathbf{R}_1\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{E}}_X\\ \dot{\boldsymbol{E}}_Y\\ \dot{\boldsymbol{E}}_Z\end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_X\\ \boldsymbol{E}_Y\\ \boldsymbol{E}_Z\end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Odvod rotacijske matrike $\mathbf{R}_1$ po času izračunamo z odvajanjem komponent:

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \begin{bmatrix} \sin\Psi\cos\Theta & -\cos\Psi\cos\Theta & 0 \\ \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi\sin\Theta & \cos\Psi\sin\Theta & 0 \end{bmatrix}\dot{\Psi} + \begin{bmatrix} \cos\Psi\sin\Theta & \sin\Psi\sin\Theta & \cos\Theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\cos\Theta & -\sin\Theta \end{bmatrix}\dot{\Theta}. \tag{2.29}$$

Matrika $\dot{\mathbf{R}}_1$ določa hitrost vrtenja baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema okrog prostorske baze oziroma drugače povedano, kako hitro se s časom spreminjata kota Ψ in Θ, zato jo upravičeno poimenujemo matrika kotnih hitrosti izbranega koordinatnega sistema. Zapisati jo želimo v lastni – izbrani bazi, v kateri dobi antisimetrično obliko, ki omogoča zapis vektorja kotne hitrosti. V enačbi (2.28) upoštevamo transformacijo (2.05):

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}_1\mathbf{R}_1^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Po opravljenem množenju dobimo:

$$\dot{\mathbf{R}}_1\mathbf{R}_1^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\Psi}\cos\Theta & \dot{\Theta} \\ -\dot{\Psi}\cos\Theta & 0 & \dot{\Psi}\sin\Theta \\ -\dot{\Theta} & -\dot{\Psi}\sin\Theta & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}_1 = -\mathbf{\Omega}_1^{\mathsf{T}}. \tag{2.31}$$

Matrika $\mathbf{\Omega}_1$ povezuje časovne odvode baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema s temi vektorji. Pravimo ji telesna matrika kotnih hitrosti izbranega koordinatnega sistema. Potem velja:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_x \\ \dot{\boldsymbol{e}}_y \\ \dot{\boldsymbol{e}}_z \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}_1\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Že v enačbi (2.31) smo pokazali, da je $\mathbf{\Omega}_1$ antisimetrična matrika, zato ima le tri medsebojno neodvisne komponente, ki jih združimo v osni vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ izbranega triroba:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{e}_x + \omega_y\boldsymbol{e}_y + \omega_z\boldsymbol{e}_z. \tag{2.33}$$

Komponente vektorja $\boldsymbol{\omega}$ so:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{yz} = \dot{\Psi}\sin\Theta, \\ \omega_y &= -\,\omega_{xz} = -\dot{\Theta}, \\ \omega_z &= \omega_{xy} = \dot{\Psi}\cos\Theta. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Odvode baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema po času lahko s pomočjo vektorja kotne hitrosti zapišemo tudi kot

$$\dot{\boldsymbol{e}}_x = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_x, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_y = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_y, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_z = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_z. \tag{2.35}$$

Podobno kot smo določili odvode baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema, poiščemo tudi odvode telesnega koordinatnega sistema. Izraza (2.09) odvajamo po času

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{bmatrix}\right) = \dot{\mathbf{R}}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{bmatrix} + \mathbf{R}_2\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{e}}_x\\ \dot{\boldsymbol{e}}_y\\ \dot{\boldsymbol{e}}_z\end{bmatrix} \tag{2.36}$$

in uporabimo izraza (2.32), dobimo

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \left(\dot{\mathbf{R}}_2 + \mathbf{R}_2\boldsymbol{\Omega}_1\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

$\boldsymbol{\Omega}_2$ je matrika kotnih hitrosti telesnega koordinatnega sistema, zapisana glede na izbrano bazo. Ponovno izrazimo odvode telesnega koordinatnega sistema z vektorji telesne baze. Zato v enačbi (2.37) upoštevamo izraz (2.11) in dobimo

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}_2\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \left(\dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}} + \mathbf{R}_2\boldsymbol{\Omega}_1\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}}\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

Po obširnem odvajanju in množenju dobimo telesno matriko kotnih hitrosti $\boldsymbol{\Omega}_2$, izraženo z baznimi vektorji telesnega koordinatnega sistema; označimo jo z $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}} + \mathbf{R}_2\boldsymbol{\Omega}_1\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}}. \tag{2.39}$$

Zaradi kompleksnosti komponent matrike $\mathbf{\Omega}$ izpišemo posamezne komponente v ločenih zapisih:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix} = -\mathbf{\Omega}^{\mathsf{T}}, \tag{2.40}$$

$$\Omega_{11} = 0,$$
$$\Omega_{12} = \dot{\Psi}\left(\sin\Theta\cos\psi\sin\vartheta + \cos\Theta\cos\vartheta\right) - \dot{\Theta}\sin\psi\sin\vartheta + \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi},$$
$$\Omega_{13} = \dot{\Psi}\left(\sin\Theta\cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\Theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\Theta\sin\vartheta\sin\varphi\right) - \\ -\dot{\Theta}\left(\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi\right) - \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi - \dot{\vartheta}\cos\varphi,$$

$$\Omega_{21} = -\Omega_{12},$$
$$\Omega_{22} = 0,$$
$$\Omega_{23} = \dot{\Psi}\left(\sin\Theta\cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\Theta\sin\psi\sin\varphi - \cos\Theta\sin\vartheta\cos\varphi\right) - \\ -\dot{\Theta}\left(\sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\right) - \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}\sin\varphi,$$

$$\Omega_{31} = -\Omega_{13},$$
$$\Omega_{32} = -\Omega_{23},$$
$$\Omega_{33} = 0.$$

$\mathbf{\Omega}$ je antisimetrična matrika, zato jo lahko nadomestimo z vektorjem kotne hitrosti telesnega koordinatnega sistema

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\boldsymbol{e}_1 + \Omega_2\boldsymbol{e}_2 + \Omega_3\boldsymbol{e}_3, \tag{2.41}$$

kjer so

$$\Omega_1 = \Omega_{23}, \qquad \Omega_2 = -\Omega_{13}, \qquad \Omega_3 = \Omega_{12}. \tag{2.42}$$

Za vektor $\boldsymbol{\Omega}$ velja:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_1, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_2, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_3. \tag{2.43}$$

Vektor telesne kotne hitrosti je izražen glede na telesno bazo, radi pa bi ga zapisali še v bazi izbranega koordinatnega sistema

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x\boldsymbol{e}_x + \Omega_y\boldsymbol{e}_y + \Omega_z\boldsymbol{e}_z. \tag{2.44}$$

Komponente Ω_x, Ω_y, Ω_z lahko določimo s pomočjo enačbe (2.11):

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

Po množenju in urejanju dobimo:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\Psi}\sin\Theta - \dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta, \\ \Omega_y &= -\dot{\Theta} + \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta, \\ \Omega_z &= \dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{2.46}$$

2.1.5 Krajevni vektorji

Med gibanjem telesa moramo poznati lego vseh delcev. Kadar je telo togo, to ni težko. Vsak delec telesa v opazovanem trenutku zavzema natanko eno točko evklidskega prostora, v katerem opisujemo gibanje telesa. Lego točk v prostoru pa opišemo s krajevnimi vektorji. Krajevni vektor poljubnega delca telesa D označimo z $\boldsymbol{r}_D$. Zapišemo ga kot vektorsko vsoto krajevnega vektorja težišča, $\boldsymbol{r}_T$, in relativnega vektorja $\boldsymbol{\rho}_D$, ki sega od težišča telesa O' k delcu D:

$$\boldsymbol{r}_D = \boldsymbol{r}_T + \boldsymbol{\rho}_D. \tag{2.47}$$

Za opis gibanja je najbolj ugodno, če zapišemo krajevne vektorje delcev glede na izhodišče prostorskega koordinatnega sistema. Tako je lega telesa v vsakem trenutku izražena glede na nepomični prostor. Krajevni vektor težišča potem zapišemo kot

$$\boldsymbol{r}_T = X_T \boldsymbol{E}_X + Y_T \boldsymbol{E}_Y + Z_T \boldsymbol{E}_Z. \tag{2.48}$$

Relativni vektor $\boldsymbol{\rho}_D$ ima v telesnem koordinatnem sistemu stalne koordinate $\boldsymbol{\rho}_D = \boldsymbol{\rho}_D(\xi_D, \eta_D, \zeta_D)$. Ob znanih zasukih Ψ, Θ, ψ, ϑ, φ ga v prostorski bazi zapišemo s pomočjo enačbe (2.14):

$$\boldsymbol{\rho}_D = X'_D \boldsymbol{E}_X + Y'_D \boldsymbol{E}_Y + Z'_D \boldsymbol{E}_Z, \qquad \begin{bmatrix} X'_D \\ Y'_D \\ Z'_D \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

2.1.6 Vektorji hitrosti

Vektor hitrosti poljubnega delca D telesa dobimo z odvajanjem njegovega krajevnega vektorja po času:

$$\boldsymbol{v}_D = \dot{\boldsymbol{r}}_D = \dot{\boldsymbol{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\rho}}_D. \tag{2.50}$$

Če vektor $\boldsymbol{\rho}_D$ zapišemo v telesni bazi, odvajamo in upoštevamo (2.43)

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\rho}}_D &= \dot{\xi}_D\boldsymbol{e}_1 + \dot{\eta}_D\boldsymbol{e}_2 + \dot{\zeta}_D\boldsymbol{e}_3 + \xi_D\dot{\boldsymbol{e}}_1 + \eta_D\dot{\boldsymbol{e}}_2 + \zeta_D\dot{\boldsymbol{e}}_3 = \xi_D\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_1 + \eta_D\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_2 + \zeta_D\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_3,\\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_D &= \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_D.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Pri tem smo upoštevali, da se koordinate togega telesa glede na telesno bazo ne spreminjajo. Vektor hitrosti poljubnega delca telesa je potem tak

$$\boldsymbol{v}_D = \dot{\boldsymbol{r}}_T + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\rho}_D. \tag{2.52}$$

Vektor hitrosti težišča, označimo ga z $\boldsymbol{v}_T$, nastopa v izreku o gibalni količini, za katerega smo se odločili, da ga zapišemo v izbranem koordinatnem sistemu. Zato bomo tudi vektor hitrosti težišča zapisali v tem sistemu. Zapišimo najprej krajevni vektor težišča:

$$\boldsymbol{r}_T = x_T\boldsymbol{e}_x + y_T\boldsymbol{e}_y + z_T\boldsymbol{e}_z. \tag{2.53}$$

Koordinate težišča (x_T, y_T, z_T) preko transformacije (2.03) izrazimo z globalnimi koordinatami (X_T, Y_T, Z_T):

$$\begin{aligned} x_T &= -X_T\cos\Psi\cos\Theta - Y_T\sin\Psi\sin\Theta + Z_T\sin\Theta,\\ y_T &= X_T\sin\Psi - Y_T\cos\Psi,\\ z_T &= X_T\cos\Psi\sin\Theta + Y_T\sin\Psi\sin\Theta + Z_T\cos\Theta.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Pri odvajanju krajevnega vektorja težišča po času upoštevamo enačbo (2.26):

$$\boldsymbol{v}_T = \dot{\boldsymbol{r}}_T = \dot{x}_T\boldsymbol{e}_x + \dot{y}_T\boldsymbol{e}_y + \dot{z}_T\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_T = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z. \tag{2.55}$$

Zapišimo ga v komponentni obliki:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}_T + \left(\omega_y z_T - \omega_z y_T\right),\\ v_y &= \dot{y}_T + \left(\omega_z x_T - \omega_x z_T\right),\\ v_z &= \dot{z}_T + \left(\omega_x y_T - \omega_y x_T\right).\end{aligned} \tag{2.56}$$

Izraze (2.54) odvajamo po času, za komponente vektorja kotne hitrosti pa upoštevamo enačbe (2.34). Po urejanju sledi

$$\begin{aligned} v_x &= -\dot{X}_T \cos\Psi \cos\Theta - \dot{Y}_T \sin\Psi \cos\Theta + \dot{Z}_T \sin\Theta, \\ v_y &= \dot{X}_T \sin\Psi - \dot{Y}_T \cos\Psi, \\ v_z &= \dot{X}_T \cos\Psi \sin\Theta + \dot{Y}_T \sin\Psi \sin\Theta + \dot{Z}_T \cos\Theta. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Pri natančnejšem pregledu enačb (2.57) opazimo, da so komponente vektorja hitrosti težišča kar enake odvodom koordinat težišča:

$$v_x = \dot{x}_T, \qquad v_y = \dot{y}_T, \qquad v_z = \dot{z}_T. \tag{2.58}$$

Razlaga je zelo preprosta. Izbrani koordinatni sistem ima izhodišče v težišču telesa, zato njegovo vrtenje ne vpliva na hitrost težišča (vpliva pa na hitrost vseh ostalih delcev telesa).

Med kotaljenjem togega telesa po ploskvi želimo poznati še vektor hitrosti delca B, ki se v danem trenutku nahaja v dotikališču telesa in ploskve. V splošnem je ta naloga odvisna od oblike telesa. Kadar pa je telo kroglica, lahko relativni krajevni vektor točke v dotikališču v izbranem koordinatnem sistemu zapišemo kot

$$\boldsymbol{\rho}_B = -a\,\boldsymbol{e}_z, \tag{2.59}$$

kjer je a polmer kroglice.

Hitrost točke v dotikališču določimo po enačbi (2.52). Ker smo vektor $\boldsymbol{\rho}_B$ zapisali v izbranem koordinatnem sistemu, moramo v enačbi upoštevati vektorja telesne kotne hitrosti in hitrosti težišča, zapisana v izbranem koordinatnem sistemu:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_T + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}_B = v_x \boldsymbol{e}_x + v_y \boldsymbol{e}_y + v_z \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{\Omega} \times \left(-a\boldsymbol{e}_z\right) = v_{Bx} \boldsymbol{e}_x + v_{By} \boldsymbol{e}_y + v_{Bz} \boldsymbol{e}_z. \tag{2.60}$$

Po vektorskem množenju dobimo

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_x - a\,\Omega_y, \\ v_{By} &= v_y + a\,\Omega_x, \\ v_{Bz} &= v_z. \end{aligned} \tag{2.61}$$

2.1.7 Sile

V izrekih o gibalni in vrtilni količini nastopajo zunanje sile oziroma momenti teh sil na težišče telesa. Z zunanjimi silami je zajet vpliv okolice na gibanje kroglice.

2.1.7.1 Zunanje sile

Gravitacijska sila Zemlje deluje v težišču kroglice, njena velikost je enaka teži kroglice, smer pa je nasprotna smeri baznega vektorja $\boldsymbol{E}_Z$:

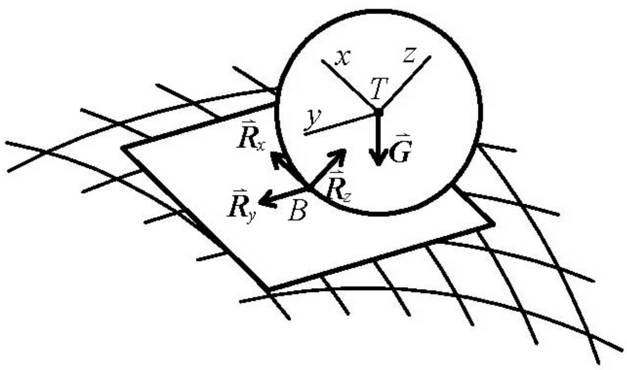
$$\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{E}_Z. \tag{2.62}$$

Prek enačbe (2.03) jo izrazimo še v izbranem koordinatnem sistemu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= G_x\boldsymbol{e}_x + G_y\boldsymbol{e}_y + G_z\boldsymbol{e}_z, \\ G_x &= -mg\sin\Theta, \\ G_y &= 0, \\ G_z &= -mg\cos\Theta. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Med kotaljenjem telesa po podlagi v dotikališčni točki deluje reakcijska sila podlage. Označimo jo z vektorjem $\boldsymbol{R}$, njena velikost in smer nam nista znani, v izbranem koordinatnem sistemu pa jo zapišemo kot

$$\boldsymbol{R} = R_x\boldsymbol{e}_x + R_y\boldsymbol{e}_y + R_z\boldsymbol{e}_z. \tag{2.64}$$



Slika 7: Sila teže, reakcijska sila podlage.

Med zunanjimi silami, ki delujejo na telo, upoštevamo še sili zračnega upora in vetra. Ker gre za površinski obtežbi, ki ju moramo integrirati po površini telesa, se omejimo na kroglico, pri tem pa vpeljemo še nekaj predpostavk:

- površinsko obtežbo zraka, ki deluje na celotno kroglico, opišemo z nadomestno enakomerno površinsko obtežbo $\boldsymbol{p}_U$, ki deluje na obteženo polovico kroglice;
- vektor nadomestne površinske obtežbe $\boldsymbol{p}_U$ je usmerjen v nasprotni smeri kot vektor hitrosti težišča;
- velikost vektorja zračnega upora je premosorazmerna z velikostjo vektorja težiščne hitrosti, sorazmernostni koeficient μ_z pa je konstanten.

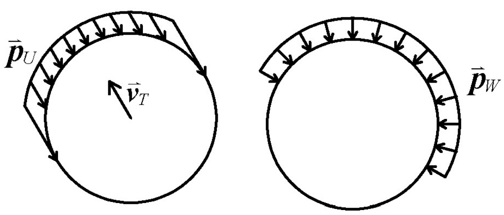
V skladu s predpostavkami vektor površinske obtežbe zraka zapišemo kot:

$$\boldsymbol{p}_U = -\mu_z \boldsymbol{v}_T. \tag{2.65}$$

Rezultirajočo silo zračnega upora določimo z integracijo $\boldsymbol{p}_\mathrm{U}$ po polovici površine krogle:

$$\boldsymbol{F}_U = \int\limits_{\substack{po\ polovici\\ krogle}} \boldsymbol{p}_U \, dS = \boldsymbol{p}_U \int\limits_S dS = -\mu_z 2\pi a^2 \boldsymbol{v}_T,$$

$$\begin{aligned} F_{Ux} &= -\mu_z 2\pi a^2 v_x, \\ F_{Uy} &= -\mu_z 2\pi a^2 v_y, \\ F_{Uz} &= -\mu_z 2\pi a^2 v_z. \end{aligned} \tag{2.66}$$



Slika 8: Površinska obtežba zračnega upora $\boldsymbol{p}_U$ in vetra $\boldsymbol{p}_W$.

Tudi za opis vpliva vetra vpeljemo nekaj predpostavk:

- veter ima med gibanjem kroglice konstantno hitrost in smer $\boldsymbol{w}$;
- vpliv vetra zajamemo z enakomerno površinsko obtežbo $\boldsymbol{p}_W$, ki deluje pravokotno na površino kroglice;
- $\boldsymbol{p}_W$ je premosorazmerna s hitrostjo vetra, sorazmernostni koeficient μ_W je konstanten in enak kot pri površinski obtežbi zaradi zračnega upora: $\mu_W = \mu_U$.

Vektor hitrosti vetra $\boldsymbol{w}$ je običajno podan glede na prostorsko bazo. Zapišemo ga še glede na izbrani koordinatni sistem:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{w} = W_X \boldsymbol{E}_X + W_Y \boldsymbol{E}_Y + W_Z \boldsymbol{E}_Z = w_x \boldsymbol{e}_x + w_y \boldsymbol{e}_y + w_z \boldsymbol{e}_z, \\ &w_x = -W_X \cos\Psi \cos\Theta - W_Y \sin\Psi \sin\Theta + W_Z \sin\Theta, \\ &w_y = W_X \sin\Psi - W_Y \cos\Psi, \\ &w_z = W_X \cos\Psi \sin\Theta + W_Y \sin\Psi \sin\Theta + W_Z \cos\Theta. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Nadomestno obtežbo vetra, ki deluje na površino kroglice, potem lahko zapišemo kot:

$$\boldsymbol{p}_W = \mu_z \boldsymbol{w}. \tag{2.68}$$

Silo vetra določimo z integracijo površinske obtežbe:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_W = \int\limits_{\substack{po\ polovici \\ krogle}} \boldsymbol{p}_W \, dS = \int\limits_S \mu_z \boldsymbol{w} dS = \mu_z 2\pi a^2 \boldsymbol{w}, \\ &F_{Wx} = \mu_z 2\pi a^2 w_x, \\ &F_{Wy} = \mu_z 2\pi a^2 w_y, \\ &F_{Wz} = \mu_z 2\pi a^2 w_z. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Zaradi krajšega zapisa sili zračnega upora in vetra združimo v skupno silo $\boldsymbol{F}_{UW}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_{UW} = F_{UWx} \boldsymbol{e}_x + F_{UWy} \boldsymbol{e}_y + F_{UWz} \boldsymbol{e}_z, \\ &F_{UWx} = -\mu_z 2\pi a^2 \left(v_x - w_x\right), \\ &F_{UWy} = -\mu_z 2\pi a^2 \left(v_y - w_y\right), \\ &F_{UWz} = -\mu_z 2\pi a^2 \left(v_z - w_z\right). \end{aligned} \tag{2.70}$$

2.1.7.2 Momenti zunanjih sil

Sila teže deluje v težišču telesa, zato je njen moment na težišče enak nič:

$$\boldsymbol{M}_G^T = \boldsymbol{0}. \tag{2.71}$$

Relativni krajevni vektor točke dotikališča, v kateri deluje sila podlage je, kadar je telo kroglica, dan z izrazom (2.59). Moment sile podlage na težišče kroglice je potem tak:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}^{T}=\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{R}=\left(-a\boldsymbol{e}_{z}\right)\times\left(R_{x}\boldsymbol{e}_{x}+R_{y}\boldsymbol{e}_{y}+R_{z}\boldsymbol{e}_{z}\right)=M_{Rx}^{T}\boldsymbol{e}_{x}+M_{Ry}^{T}\boldsymbol{e}_{y}+M_{Rz}^{T}\boldsymbol{e}_{z},\\
&M_{Rx}^{T}=aR_{y},\\
&M_{Ry}^{T}=-aR_{x},\\
&M_{Rz}^{T}=0.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Smernici rezultant obtežb vetra in zračnega upora potekata skozi težišče kroglice, zato ne povzročata momenta:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}_{UW}}^{T}=\boldsymbol{0}. \tag{2.73}$$

2.2 Gibalne enačbe

Gibanje vodita izreka o gibalni in vrtilni količini. Izpeljemo ju za primer, ko je obravnavano telo kroglica, in zapišemo glede na izbrani koordinatni sistem.

2.2.1 Izrek o gibalni količini

Vektor gibalne količine, označimo ga s $\boldsymbol{K}$, togega telesa je produkt mase in težiščne hitrosti:

$$\boldsymbol{K}=m\boldsymbol{v}_{T}. \tag{2.74}$$

Za maso predpostavimo, da se med gibanjem ohranja $m=konst$.
Izrek o gibalni količini zahteva

$$\dot{\boldsymbol{K}}=\sum\boldsymbol{F}. \tag{2.75}$$

Odvod gibalne količine po času dobimo, če odvod vektorja hitrosti po času pomnožimo z maso:

$$\dot{\boldsymbol{K}}=m\dot{\boldsymbol{v}}_{T}. \tag{2.76}$$

Vektor hitrosti težišča je zapisan glede na izbrani koordinatni sistem. Odvod vektorja po času določimo z upoštevanjem pravila (2.26):

$$\dot{\boldsymbol{v}}_T = \dot{v}_x \boldsymbol{e}_x + \dot{v}_y \boldsymbol{e}_y + \dot{v}_z \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_T,$$
$$\dot{\boldsymbol{v}}_T = \left[\dot{v}_x + \left(\omega_y v_z - \omega_z v_y \right) \right] \boldsymbol{e}_x + \left[\dot{v}_y + \left(\omega_z v_x - \omega_x v_z \right) \right] \boldsymbol{e}_y + \left[\dot{v}_z + \left(\omega_x v_y - \omega_y v_x \right) \right] \boldsymbol{e}_z. \tag{2.77}$$

Izrek o gibalni količini sedaj lahko zapišemo v skalarni obliki:

$$m\left[\dot{v}_x + \left(\omega_y v_z - \omega_z v_y \right) \right] = G_x + R_x + F_{UWx},$$
$$m\left[\dot{v}_y + \left(\omega_z v_x - \omega_x v_z \right) \right] = G_y + R_y + F_{UWy}, \tag{2.78}$$
$$m\left[\dot{v}_z + \left(\omega_x v_y - \omega_y v_x \right) \right] = G_z + R_z + F_{UWz}.$$

Upoštevamo še izraze (2.34) za komponente vektorja kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ in enačbe (2.63) in (2.70). Po urejanju dobimo:

$$m\dot{v}_x - \dot{\Psi} m v_y \cos\Theta - \dot{\Theta} m v_z = R_x - mg\sin\Theta - \mu_z 2\pi a^2 \left(v_x - w_x \right),$$
$$m\dot{v}_y + \dot{\Psi} m \left(v_x \cos\Theta - v_z \sin\Theta \right) = R_y - \mu_z 2\pi a^2 \left(v_y - w_y \right), \tag{2.79}$$
$$m\dot{v}_z + \dot{\Psi} m v_y \sin\Theta + \dot{\Theta} m v_x = R_z - mg\cos\Theta - \mu_z 2\pi a^2 \left(v_z - w_z \right).$$

2.2.2 Izrek o vrtilni količini

Vrtilno količino togega telesa glede na težišče označujemo z $\boldsymbol{L}^T$ in izračunamo po obrazcu:

$$\boldsymbol{L}^T = \int_V \rho_m \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \, dV. \tag{2.80}$$

ρ_m je gostota materiala, $\boldsymbol{\rho}$ pa relativni krajevni vektorji delcev telesa. Če $\boldsymbol{\rho}$ izrazimo v telesni bazi, lahko njegov časovni odvod zapišemo tako kot v enačbi (2.51). Vrtilna količina je potem taka:

$$\boldsymbol{L}^T = \int_V \rho_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho} \right) dV. \tag{2.81}$$

Vrtilno količino želimo zapisati v izbrani bazi. Vektorja $\boldsymbol{\rho}$ in $\boldsymbol{\Omega}$ zapišemo v izbrani bazi koordinatnega sistema: $\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \boldsymbol{e}_x + \Omega_y \boldsymbol{e}_y + \Omega_z \boldsymbol{e}_z$. Za integracijske spremenljivke vzamemo kar koordinate x, y, z. Upoštevamo, da so bazni vektorji in komponente kotne hitrosti integracijske konstante. Tako izpeljemo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^T &= \left(J_{xx}\Omega_x + J_{xy}\Omega_y + J_{xz}\Omega_z\right)\boldsymbol{e}_x + \left(J_{yx}\Omega_x + J_{yy}\Omega_y + J_{yz}\Omega_z\right)\boldsymbol{e}_y + \\ &+ \left(J_{zx}\Omega_x + J_{zy}\Omega_y + J_{zz}\Omega_z\right)\boldsymbol{e}_z,\end{aligned} \tag{2.82}$$

kjer so z J_{xx}, J_{xy},... J_{zz} označeni težiščni vztrajnostni momenti telesa glede na izbrani koordinatni sistem:

$$\begin{aligned}J_{xx} &= \iiint \rho_m \left(y^2 + z^2\right) dxdydz,\\ J_{yy} &= \iiint \rho_m \left(z^2 + x^2\right) dxdydz,\\ J_{zz} &= \iiint \rho_m \left(x^2 + y^2\right) dxdydz,\\ J_{xy} &= -J_{yx} = -\iiint \rho_m\, xydxdydz,\\ J_{yz} &= -J_{zy} = -\iiint \rho_m\, yzdxdydz,\\ J_{zx} &= -J_{xz} = -\iiint \rho_m\, zxdxdydz.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Kroglica je popolnoma rotacijsko simetrična, zato je v tem primeru velikost težiščnih vztrajnostnih momentov neodvisna od koordinatnega sistema, v katerem jih zapisujemo. Popolna rotacijska simetričnost kroglice je tudi razlog, da so osi izbranega koordinatnega sistema hkrati tudi glave vztrajnostne osi kroglice. Vztrajnostni momenti okrog izbranih osi so zato medsebojno enaki, deviacijski vztrajnostni momenti pa enaki nič:

$$\begin{aligned}J_{xx} &= J_{yy} = J_{zz} = \frac{2}{5}ma^2 = A,\\ J_{xy} &= J_{yz} = J_{zx} = 0.\end{aligned} \tag{2.84}$$

Vrtilna količina kroglice glede na težišče je potem

$$\boldsymbol{L}^T = A\Omega_x\boldsymbol{e}_x + A\Omega_y\boldsymbol{e}_y + A\Omega_z\boldsymbol{e}_z. \tag{2.85}$$

Izrek o vrtilni količini pove, da je odvod vrtilne količine togega telesa po času enak vsoti momentov zunanjih sil na težišče:

$$\dot{\boldsymbol{L}}^T = \sum \boldsymbol{M}. \tag{2.86}$$

Odvod vrtilne količine po času določimo z odvajanjem izraza (2.85), seveda ob upoštevanju pravila (2.26):

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{L}}^T &= A\dot{\Omega}_x \boldsymbol{e}_x + A\dot{\Omega}_y \boldsymbol{e}_y + A\dot{\Omega}_z \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}^T, \\
\dot{\boldsymbol{L}}^T &= A\left[\dot{\Omega}_x + \left(\omega_y \Omega_z - \omega_z \Omega_y\right)\right]\boldsymbol{e}_x + A\left[\dot{\Omega}_y + \left(\omega_z \Omega_x - \omega_x \Omega_z\right)\right]\boldsymbol{e}_y + \\
&\quad + A\left[\dot{\Omega}_z + \left(\omega_x \Omega_y - \omega_y \Omega_x\right)\right]\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

Izrek o vrtilni količini v skalarni obliki je tako:

$$
\begin{aligned}
A\left[\dot{\Omega}_x + \left(\omega_y \Omega_z - \omega_z \Omega_y\right)\right] &= M_{Rx}^T, \\
A\left[\dot{\Omega}_y + \left(\omega_z \Omega_x - \omega_x \Omega_z\right)\right] &= M_{Ry}^T, \\
A\left[\dot{\Omega}_z + \left(\omega_x \Omega_y - \omega_y \Omega_x\right)\right] &= M_{Rz}^T.
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

Upoštevamo še enačbe (2.34) in (2.72) in uredimo:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{\Omega}_x - \dot{\Psi} A\Omega_y \cos\Theta - \dot{\Theta} A\Omega_z = aR_y, \\
&A\dot{\Omega}_y + \dot{\Psi} A\left(\Omega_x \cos\Theta - \Omega_z \sin\Theta\right) = -aR_x, \\
&A\dot{\Omega}_z + \dot{\Psi} A\Omega_y \sin\Theta + \dot{\Theta} A\Omega_x = 0.
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

Tako smo izpeljali enačbe gibanja toge kroglice, ki veljajo neodvisno od vrste gibanja. V nadaljevanju podrobno obravnavamo še enačbe, ki določajo posamezne oblike gibanja.

3 KOTALJENJE KROGLICE

Najprej izpeljemo enačbe, ki opisujejo kotaljenje kroglice po poljubni ploskvi v prostoru. Med kotaljenjem je kroglica stalno v stiku s podlago. Predpostavljamo, da je stik v eni sami točki, v kateri deluje tudi reakcijska sila podlage. Sile podlage ne poznamo in predstavlja del seznama neznank problema. Razmere v dotikališču opišemo s Coulombovim zakonom trenja. Opozorimo že na tem mestu, da lahko pri nekem razmerju komponent reakcijske sile podlage pride do zdrsa kroglice. Takrat postanejo komponente reakcijske sile odvisne od hitrosti podrsavanja, zato moramo gibalne enačbe zapisati na novo.

Razmere v dotikališču najlažje opišemo v izbranem koordinatnem sistemu. Reakcijska sila podlage je zapisana že v izrazu (2.64), glede na osi izbranega koordinatnega sistema pa jo lahko preprosto razstavimo na normalno silo podlage ter silo trenja, ki deluje v tangentni ravnini v točki dotikališča:

$$\boldsymbol{R} = R_x \boldsymbol{e}_x + R_y \boldsymbol{e}_y + R_z \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}. \tag{3.01}$$

Sila trenja je kar vektorska vsota komponent reakcijske sile v x in y smeri. Njeno velikost označimo s T. Normalna sila podlage je enaka komponenti reakcijske sile v smeri z, njeno velikost pa označimo z N:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T} = R_x \boldsymbol{e}_x + R_y \boldsymbol{e}_y, \qquad T = |\boldsymbol{T}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \\ &\boldsymbol{N} = R_z \boldsymbol{e}_z, \qquad N = |\boldsymbol{N}| = |R_z|. \end{aligned} \tag{3.02}$$

Trenjske lastnosti materialov kroglice in podlage povzema koeficient trenja μ. Predpostavimo, da je koeficient trenja konstanten in neodvisen od vrste gibanja. Izkoriščenost torne sposobnosti na stiku kroglica – podlaga je podana z razmerjem med velikostjo sile trenja in normalno silo podlage. Dokler med kotaljenjem velja

$$\frac{T}{N} < \mu, \tag{3.03}$$

se kroglica kotali brez podrsavanja, čim pa pogoj (3.03) ni izpolnjen, pride do zdrsa, enačbam gibanja pa moramo dodati vezno enačbo

$$T = \mu N. \tag{3.04}$$

Preden zapišemo enačbe za posamezno vrsto kotaljenja, opišimo še pogoja, ki morata biti izpolnjena, da se kroglica in podlaga dotikata. Med kotaljenjem po podlagi kroglica "pritiska" na ploskev, zato je normalna komponenta reakcijske sile $\boldsymbol{R}$ usmerjena v smeri normale na ploskev oziroma baznega vektorja $\boldsymbol{e}_z$. R_z je tako ves čas kotaljenja pozitivna količina. Če postane negativna, se kroglica odlepi od podlage in kotaljenja je konec. Drugi pogoj je prav tako očiten: med kotaljenjem se kroglica ne sme odlepiti od podlage ali se vanjo pogrezniti. Hitrost delca v dotikališču v smeri normale na ploskev, to je lokalne osi z, mora biti enaka nič: $v_{Bz} = 0$. Hitrost, večja od nič, bi pomenila odlepitev kroglice od podlage, hitrost manjša od nič pa vtisk v podlago.

3.1 Kotaljenje brez podrsavanja

Osnovni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja je, da je hitrost delca, ki se nahaja v dotikališču – ali krajše hitrost dotikališča – enaka nič:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{0}. \tag{3.05}$$

Pogoj upoštevamo v enačbah (2.61) in dobimo kinematične vezi pri kotaljenju brez podrsavanja v izbranem koordinatnem sistemu:

$$\begin{aligned} v_x - a\Omega_y &= 0, \\ v_y + a\Omega_x &= 0, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \tag{3.06}$$

V izreku o gibalni količini in izreku o vrtilni količini (2.79) in (2.89) so komponente reakcije podlage edine neznane količine, ki ne nastopajo v odvodih po času. Zaradi učinkovitejšega reševanja diferencialnih enačb komponente reakcije podlage izločimo iz sistema enačb. Iz enačb (2.79) izrazimo:

$$\begin{aligned}
R_x &= m\dot{v}_x - \dot{\Psi} m v_y \cos\Theta - \dot{\Theta} m v_z + mg\sin\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_x - w_x\right),\\
R_y &= m\dot{v}_y + \dot{\Psi} m\left(v_x \cos\Theta - v_z \sin\Theta\right) + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_y - w_y\right),\\
R_z &= m\dot{v}_z + \dot{\Psi} m v_y \sin\Theta + \dot{\Theta} m v_x + mg\cos\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_z - w_z\right)
\end{aligned} \tag{3.07}$$

in vstavimo v enačbe (2.89):

$$\begin{aligned}
& A\dot{\Omega}_x - \dot{\Psi} A\Omega_y \cos\Theta - \dot{\Theta} A\Omega_z = \\
& \qquad = a\left[m\dot{v}_y + \dot{\Psi} m\left(v_x \cos\Theta - v_z \sin\Theta\right) + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_y - w_y\right)\right],\\
& A\dot{\Omega}_y + \dot{\Psi} A\left(\Omega_x \cos\Theta - \Omega_z \sin\Theta\right) = \\
& \qquad = -a\left[m\dot{v}_x - \dot{\Psi} m v_y \cos\Theta - \dot{\Theta} m v_z + mg\sin\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_x - w_x\right)\right],\\
& A\dot{\Omega}_z + \dot{\Psi} A\Omega_y \sin\Theta + \dot{\Theta} A\Omega_x = 0.
\end{aligned} \tag{3.08}$$

Enačbe uredimo tako, da člene, v katerih nastopajo odvodi neznank po času, pišemo na levi, ostale pa na desni:

$$\begin{aligned}
& ma\dot{v}_y + \dot{\Psi}\left[ma\left(v_x \cos\Theta - v_z \sin\Theta\right) + A\Omega_y \cos\Theta\right] + \dot{\Theta} A\Omega_z - A\dot{\Omega}_x = \\
& \qquad = -\mu_z 2\pi a^3 \left(v_y - w_y\right),\\
& -ma\dot{v}_x + \dot{\Psi}\left[mav_y \cos\Theta - A\left(\Omega_x \cos\Theta - \Omega_z \sin\Theta\right)\right] + \dot{\Theta} mav_z - A\dot{\Omega}_y = \\
& \qquad = mga\sin\Theta + \mu_z 2\pi a^3 \left(v_x - w_x\right),\\
& \dot{\Psi}\,\Omega_y \sin\Theta + \dot{\Theta}\,\Omega_x + \dot{\Omega}_z = 0.
\end{aligned} \tag{3.09}$$

Z zapisom kinematičnih vezi, ki pripadajo kotaljenju brez podrsavanja, in z ureditvijo gibalnih enačb smo kotaljenje brez podrsavanja natančno opisali. Preglejmo neznanke našega problema in enačbe, ki jih imamo na voljo za rešitev.

Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja

Osnovne neznanke so vse neznane količine problema, ki jih med izpeljavami nismo izrazili z drugimi neznankami; to so:

- tri težiščne koordinate, zapisane v prostorskem koordinatnem sistemu: X_T, Y_T, Z_T;
- tri komponente hitrosti težišča, zapisane v izbranem koordinatnem sistemu: v_x, v_y, v_z;
- tri komponente telesnega vektorja kotne hitrosti, zapisane v izbranem koordinatnem sistemu: Ω_x, Ω_y, Ω_z;

- dva zasuka izbranega koordinatnega sistema Ψ in Θ;
- ter še trije Eulerjevi zasuki telesnega koordinatnega sistema: ψ, ϑ, φ.

Odvisne neznanke pa so:

- tri komponente vektorja kotne hitrosti izbranega koordinatnega sistema: ω_x, ω_y, ω_z, ki smo jih z osnovnimi neznankami zapisali v izrazih (2.34);
- tri komponente reakcijske sile podlage: R_x, R_y, R_z, izražene v enačbah (3.07).

Enačbe, ki jih imamo na voljo, preglejmo v nasprotnem vrstnem redu, kot so bile izpeljane – od teh, ki pripadajo izključno kotaljenju brez podrsavanja, do tistih bolj splošnih, ki veljajo za vse vrste gibanja. Na voljo imamo:

- tri diferencialne enačbe izreka o vrtilni količini (3.09);
- tri algebrajske enačbe – kinematične vezi (3.06), ki pripadajo kotaljenju brez podrsavanja;
- tri diferencialne enačbe (2.57) za določitev težiščnih hitrosti;
- tri diferencialne enačbe (2.46), ki povezujejo Eulerjeve zasuke s komponentami telesnega vektorja kotnih hitrosti;
- in še dve algebrajski enačbi (2.25), ki povezujeta zasuka Ψ in Θ z naklonskimi koeficienti tangentne ravnine; naklonska koeficienta sta pri tem samo navidezni neznanki, saj jih v vsakem trenutku lahko izračunamo iz enačb (2.17).

Za skupno 14 osnovnih neznank problema imamo na voljo ravno toliko enačb. Odločimo se, da jih bomo rešili z numeričnimi metodami, ki jih ponuja programski paket *Matlab*. Že ob naštevanju enačb smo izrazito poudarili, da so nekatere enačbe sistema diferencialne, druge pa algebrajske. Opravka imamo torej z mešanim sistemom enačb, za katerega pa vemo, da pri numeričnem reševanju povzroča težave. Problem rešimo tako, da algebrajske enačbe pretvorimo v diferencialne z odvajanjem po času.

Najprej po času odvajamo algebrajske enačbe (3.06) in dobimo:

$$\begin{aligned} &\dot{v}_x - a\dot{\Omega}_y = 0, \\ &\dot{v}_y + a\dot{\Omega}_x = 0, \\ &\dot{v}_z = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pri odvajanju enačb (2.25) po času se zastavi načelno vprašanje, kako določiti časovne odvode naklonskih koeficientov tangentne ravnine, ker je ta podana le v odvisnosti od X in Y. Rešitev je preprosta – časovne odvode naklonov tangentne ravnine lahko zapišemo tudi kot:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial t} &= \frac{\partial k_1}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial k_1}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\frac{\partial Y}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\dot{X} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\dot{Y} = k_{1,X}\dot{X} + k_{1,Y}\dot{Y}, \\ \frac{\partial k_2}{\partial t} &= \frac{\partial k_2}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial k_2}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)\frac{\partial Y}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\dot{X} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\dot{Y} = k_{2,X}\dot{X} + k_{2,Y}\dot{Y}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pri izvrednotenju koordinat X in Y po času moramo biti pazljivi, saj pomenita X in Y v (3.11) koordinati dotikališčne točke X_B, Y_B. Ti koordinati moramo izraziti s koordinatami težišča, ki so osnovne neznanke. Iz enačb (2.59), (2.47) in (2.03) sledi

$$\begin{aligned} X_B &= X_T - a\cos\Psi\sin\Theta, \\ Y_B &= Y_T - a\sin\Psi\sin\Theta, \\ Z_B &= Z_T - a\cos\Theta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Z odvajanjem prvih dveh enačb v (3.12) po času dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{X}_B &= \dot{X}_T + \dot{\Psi}a\sin\Psi\sin\Theta - \dot{\Theta}a\cos\Psi\cos\Theta, \\ \dot{Y}_B &= \dot{Y}_T - \dot{\Psi}a\cos\Psi\sin\Theta - \dot{\Theta}a\sin\Psi\cos\Theta. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Enačbe (3.13) upoštevamo v enačbah (3.11):

$$\begin{aligned} &k_{1,X}\left(X_B, Y_B\right)\cdot\dot{X}_B + k_{1,Y}\left(X_B, Y_B\right)\cdot\dot{Y}_B = \\ &\quad = k_{11}\cdot\left(\dot{X}_T + \dot{\Psi}a\sin\Psi\sin\Theta - \dot{\Theta}a\cos\Psi\cos\Theta\right) + \\ &\quad + k_{12}\left(\dot{Y}_T - \dot{\Psi}a\cos\Psi\sin\Theta - \dot{\Theta}a\sin\Psi\cos\Theta\right), \\ &k_{2,X}\left(X_B, Y_B\right)\cdot\dot{X}_B + k_{2,Y}\left(X_B, Y_B\right)\cdot\dot{Y}_B = \\ &\quad = k_{12}\cdot\left(\dot{X}_T + \dot{\Psi}a\sin\Psi\sin\Theta - \dot{\Theta}a\cos\Psi\cos\Theta\right) + \\ &\quad + k_{22}\cdot\left(\dot{Y}_T - \dot{\Psi}a\cos\Psi\sin\Theta - \dot{\Theta}a\sin\Psi\cos\Theta\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Enačbi upoštevamo v (3.11) in že lahko zapišemo diferencialno obliko enačb (2.25), ki smo jo iskali:

$$\begin{aligned} &k_{11}\left(\dot{X}_T+\dot{\Psi}a\sin\Psi\sin\Theta-\dot{\Theta}a\cos\Psi\cos\Theta\right)+\\ &\quad+k_{12}\left(\dot{Y}_T-\dot{\Psi}a\cos\Psi\sin\Theta-\dot{\Theta}a\sin\Psi\cos\Theta\right)=\\ &\quad=\dot{\Psi}\sin\Psi\tan\Theta-\dot{\Theta}\cos\Psi\frac{1}{\cos^2\Theta},\\ &k_{12}\left(\dot{X}_T+\dot{\Psi}a\sin\Psi\sin\Theta-\dot{\Theta}a\cos\Psi\cos\Theta\right)+\\ &\quad+k_{22}\left(\dot{Y}_T-\dot{\Psi}a\cos\Psi\sin\Theta-\dot{\Theta}a\sin\Psi\cos\Theta\right)=\\ &\quad=-\dot{\Psi}\cos\Psi\tan\Theta-\dot{\Theta}\sin\Psi\frac{1}{\cos^2\Theta}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Po urejanju dobimo:

$$\begin{aligned} &\dot{X}_Tk_{11}+\dot{Y}_Tk_{12}+\dot{\Psi}\left(k_{11}a\sin\Psi\sin\Theta-k_{12}a\cos\Psi\sin\Theta-\sin\Psi\tan\Theta\right)+\\ &\quad+\dot{\Theta}\left(-k_{11}a\cos\Psi\cos\Theta-k_{12}a\sin\Psi\cos\Theta+\cos\Psi\frac{1}{\cos^2\Theta}\right)=0,\\ &\dot{X}_Tk_{12}+\dot{Y}_Tk_{22}+\dot{\Psi}\left(k_{12}a\sin\Psi\sin\Theta-k_{22}a\cos\Psi\sin\Theta+\cos\Psi\tan\Theta\right)+\\ &\quad+\dot{\Theta}\left(-k_{12}a\cos\Psi\cos\Theta-k_{22}a\sin\Psi\cos\Theta+\sin\Psi\frac{1}{\cos^2\Theta}\right)=0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Vse enačbe kotaljenja brez podrsavanja smo zapisali v diferencialni obliki. Za 14 neznank

$$X_T,Y_T,Z_T,\quad \Psi,\Theta,\quad v_x,v_y,v_z,\quad \psi,\vartheta,\varphi,\quad \Omega_x,\Omega_y,\Omega_z \tag{3.17}$$

je na voljo 14 diferencialnih enačb prvega reda (3.09), (3.10), (2.57), (2.46) in (3.16). Vse neznanke nastopajo le v prvih odvodih, zato so pripadajoči začetni pogoji zanje:

$$\begin{aligned} t=t_0:\quad &X_T(t_0)=X_T^0,\quad Y_T(t_0)=Y_T^0,\quad Z_T(t_0)=Z_T^0,\\ &\Psi(t_0)=\Psi^0,\quad \Theta(t_0)=\Theta^0,\\ &v_x(t_0)=v_x^0,\quad v_y(t_0)=v_y^0,\quad v_z(t_0)=v_z^0,\\ &\psi(t_0)=\psi^0,\quad \vartheta(t_0)=\vartheta^0,\quad \varphi(t_0)=\varphi^0,\\ &\Omega_x(t_0)=\Omega_x^0,\quad \Omega_y(t_0)=\Omega_y^0,\quad \Omega_z(t_0)=\Omega_z^0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Začetni pogoji med sabo niso popolnoma neodvisni. V začetku gibanja mora biti v dotikališču izpolnjen pogoj (3.05) o nepodrsavanju, zato tudi za začetne pogoje velja kinematična vez (3.06):

$$\begin{aligned} & v_x^0 - a\,\Omega_y^0 = 0, \\ & v_y^0 + a\,\Omega_x^0 = 0, \\ & v_z^0 = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Za točko dotikališča kroglice in ploskve ob začetku gibanja velja:

$$Z_B^0 = f\left(X_B^0, Y_B^0\right). \tag{3.20}$$

Od začetne lege dotikališča je odvisna začetna lega težišča:

$$\begin{aligned} & X_T^0 = X_B^0 + a\cos\Psi^0 \sin\Theta^0, \\ & Y_T^0 = Y_B^0 + a\sin\Psi^0 \sin\Theta^0, \\ & Z_T^0 = Z_B^0 + a\cos\Theta^0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Od začetne lege dotikališča sta odvisni tudi začetni vrednosti kotov Ψ in Θ. Določimo ju s pomočjo enačb (2.17), (2.21) in (2.23):

$$\begin{aligned} & k_1^0 = \left.\frac{\partial Z}{\partial X}\right|_{X_B^0, Y_B^0}, \qquad k_2^0 = \left.\frac{\partial Z}{\partial Y}\right|_{X_B^0, Y_B^0}, \\ & \cos\Psi^0 = \frac{-k_1^0}{\sqrt{\left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2}}, \qquad \sin\Psi^0 = \frac{-k_2^0}{\sqrt{\left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2}}, \\ & \cos\Theta^0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2}}, \qquad \sin\Theta^0 = \frac{\sqrt{\left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2}}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja je podan v oknu 1. Začetni pogoji z veznimi enačbami pa so prikazani v oknu 2.

Okno 1: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja.

Osnovne neznanke: $X_T, Y_T, Z_T, \Psi, \Theta, v_x, v_y, v_z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$

$$[B_1] \quad \dot{X}_T\left(-\cos\Psi\cos\Theta\right)+\dot{Y}_T\left(-\sin\Psi\cos\Theta\right)+\dot{Z}_T\sin\Theta = v_x$$

$$[B_2] \quad \dot{X}_T\sin\Psi-\dot{Y}_T\cos\Psi = v_y$$

$$[B_3] \quad \dot{X}_T\cos\Psi\sin\Theta+\dot{Y}_T\sin\Psi\sin\Theta+\dot{Z}_T\cos\Theta = v_z$$

$$[B_4] \quad \dot{v}_x - a\dot{\Omega}_y = 0$$

$$[B_5] \quad \dot{v}_y + a\dot{\Omega}_x = 0$$

$$[B_6] \quad \dot{v}_z = 0$$

$$[B_7] \quad \begin{aligned}&\dot{\Psi}\left[ma\left(v_x\cos\Theta - v_z\sin\Theta\right)+A\Omega_y\cos\Theta\right]+\dot{\Theta}A\Omega_z+ma\dot{v}_y-A\dot{\Omega}_x=\\&=-\mu_z 2\pi a^3\left(v_y-w_y\right)\end{aligned}$$

$$[B_8] \quad \begin{aligned}&\dot{\Psi}\left[mav_y\cos\Theta - A\left(\Omega_x\cos\Theta-\Omega_z\sin\Theta\right)\right]+\dot{\Theta}mav_z-am\dot{v}_x-A\dot{\Omega}_y=\\&=mga\sin\Theta+\mu_z 2\pi a^3\left(v_x-w_x\right)\end{aligned}$$

$$[B_9] \quad \dot{\Psi}\Omega_y\sin\Theta+\dot{\Theta}\Omega_x+\dot{\Omega}_z=0$$

$$[B_{10}] \quad \dot{\Psi}\sin\Theta-\dot{\vartheta}\sin\psi+\dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta=\Omega_x$$

$$[B_{11}] \quad -\dot{\Theta}+\dot{\vartheta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta=\Omega_y$$

$$[B_{12}] \quad \dot{\Psi}\cos\Theta+\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta=\Omega_z$$

$$[B_{13}] \quad \begin{aligned}&\dot{X}_T k_{11}+\dot{Y}_T k_{12}+\dot{\Psi}\left(k_{11}a\sin\Psi\sin\Theta-k_{12}a\cos\Psi\sin\Theta-\sin\Psi\tan\Theta\right)+\\&+\dot{\Theta}\left(-k_{11}a\cos\Psi\cos\Theta-k_{12}a\sin\Psi\cos\Theta+\cos\Psi\frac{1}{\cos^2\Theta}\right)=0\end{aligned}$$

$$[B_{14}] \quad \begin{aligned}&\dot{X}_T k_{12}+\dot{Y}_T k_{22}+\dot{\Psi}\left(k_{12}a\sin\Psi\sin\Theta-k_{22}a\cos\Psi\sin\Theta+\cos\Psi\tan\Theta\right)+\\&+\dot{\Theta}\left(-k_{12}a\cos\Psi\cos\Theta-k_{22}a\sin\Psi\cos\Theta+\sin\Psi\frac{1}{\cos^2\Theta}\right)=0\end{aligned}$$

Odvisne neznanke: $R_x, R_y, R_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$

$$[O_1] \quad R_x = m\dot{v}_x + mg\sin\Theta+\mu_z 2\pi a^2\left(v_x-w_x\right)$$

$$[O_2] \quad R_y = m\dot{v}_y + \mu_z 2\pi a^2\left(v_y-w_y\right)$$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[O_3] \quad R_z = m\dot{v}_z + mg\cos\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_z - w_z\right)$$

$$[O_4] \quad \omega_x = \dot{\Psi}\sin\Theta$$

$$[O_5] \quad \omega_y = -\dot{\Theta}$$

$$[O_6] \quad \omega_z = \dot{\Psi}\cos\Theta$$

Pomožne enačbe:

$$[P_1] \quad w_x = -W_X\cos\Psi\cos\Theta - W_Y\sin\Psi\cos\Theta + W_Z\sin\Theta$$

$$[P_2] \quad w_y = W_X\sin\Psi - W_Y\cos\Psi$$

$$[P_3] \quad w_z = W_X\cos\Psi\sin\Theta + W_Y\sin\Psi\sin\Theta + W_Z\cos\Theta$$

$$[P_4] \quad k_{11} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$$

$$[P_5] \quad k_{12} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$$

$$[P_6] \quad k_{22} = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$$

Okno 2: Začetni pogoji pri kotaljenju brez podrsavanja.

$t = t_0$:

$$X_B\left(t_0\right) = X_B^0, \qquad Y_B\left(t_0\right) = Y_B^0$$

$$v_x\left(t_0\right) = v_x^0, \qquad v_y\left(t_0\right) = v_y^0, \qquad v_z\left(t_0\right) = v_z^0$$

$$\psi\left(t_0\right) = \psi^0, \qquad \vartheta\left(t_0\right) = \vartheta^0, \qquad \varphi\left(t_0\right) = \varphi^0$$

$$\Omega_x\left(t_0\right) = \Omega_x^0, \qquad \Omega_y\left(t_0\right) = \Omega_y^0, \qquad \Omega_z\left(t_0\right) = \Omega_z^0$$

Vezne enačbe:

$$Z_B^0 = f\left(X_B^0, Y_B^0\right)$$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$\tan\Psi^0 = \frac{k_2^0}{k_1^0}$$

$$\tan\Theta^0 = \sqrt{\left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2}$$

$$X_T^0 = X_B^0 + a\cos\Psi^0 \sin\Theta^0$$

$$Y_T^0 = Y_B^0 + a\sin\Psi^0 \sin\Theta^0$$

$$Z_T^0 = Z_B^0 + a\cos\Theta^0$$

$$v_x^0 - a\Omega_y^0 = 0$$

$$v_y^0 + a\Omega_x^0 = 0$$

$$v_z^0 = 0$$

3.1.1 Zapis sistema diferencialnih enačb v matrični obliki

Osnovni sistem diferencialnih enačb [B_1]–[B_{14}] rešujemo numerično. Zaradi preglednosti in lažje priprave programov v *Matlab*-u ga zapišemo v matrični obliki. Enačbe [B_1]–[B_{14}] lahko zapišemo v obliki:

$$\mathbf{M}_\mathrm{b}\dot{\boldsymbol{x}}_\mathrm{b} = \boldsymbol{f}_\mathrm{b}. \tag{3.23}$$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}}$ je stolpec neznank

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \\ \Psi \\ \Theta \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \psi \\ \vartheta \\ \varphi \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

$\boldsymbol{f}_{\mathrm{b}}$ je stolpec desnih strani

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_z 2\pi a^3 \left(v_y - w_y\right) \\ m g a \sin\Theta + \mu_z 2\pi a^3 \left(v_x - w_x\right) \\ 0 \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

M$_b$ je 'masna' matrika sistema. Matrika je kvadratna in nesimetrična. Zaradi pomanjkanja prostora jo zapišimo samo shematsko (pika '.' označuje ničelno komponento, *X* pa neničelno):

$$
\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix}
X & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
X & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & X & . & . & . & . & . & . & X & . \\
. & . & . & . & . & . & X & . & . & . & . & X & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & X & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & X & X & . & X & . & . & . & . & X & . & . \\
. & . & . & X & X & X & . & . & . & . & . & . & X & . \\
. & . & . & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & X \\
. & . & . & X & . & . & . & . & . & X & X & . & . & . \\
. & . & . & . & X & . & . & . & . & X & X & . & . & . \\
. & . & . & X & . & . & . & . & X & . & X & . & . & . \\
X & X & . & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
X & X & . & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}. \tag{3.26}
$$

Neničelne komponente so:

$$\mathrm{M_b}(1,1) = -\cos\Psi\cos\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(1,2) = -\sin\Psi\cos\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(1,3) = \sin\Theta,$$

$$\mathrm{M_b}(2,1) = \sin\Psi,$$
$$\mathrm{M_b}(2,2) = -\cos\Psi,$$

$$\mathrm{M_b}(3,1) = \cos\Psi\sin\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(3,2) = \sin\Psi\sin\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(3,3) = \cos\Theta,$$

$$\mathrm{M_b}(4,6) = 1,$$
$$\mathrm{M_b}(4,13) = -a,$$

$$\mathrm{M_b}(5,7) = 1,$$
$$\mathrm{M_b}(5,12) = a,$$

$$\mathrm{M_b}(6,8) = 1,$$

$$\mathrm{M_b}(7,4) = ma\left(v_x \cos\Theta - v_z \sin\Theta\right) + A\Omega_y \cos\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(7,5) = A\Omega_z,$$
$$\mathrm{M_b}(7,7) = ma,$$
$$\mathrm{M_b}(7,12) = -A,$$

$$\mathrm{M_b}(8,4) = mav_y \cos\Theta - A\left(\Omega_x \cos\Theta - \Omega_z \sin\Theta\right),$$
$$\mathrm{M_b}(8,5) = mav_z,$$
$$\mathrm{M_b}(8,6) = -ma,$$
$$\mathrm{M_b}(8,13) = -A,$$

$$\mathrm{M_b}(9,4) = \Omega_y \sin\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(9,5) = \Omega_x,$$
$$\mathrm{M_b}(9,14) = 1,$$

$$\mathrm{M_b}(10,4) = \sin\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(10,10) = -\sin\psi,$$
$$\mathrm{M_b}(10,11) = \cos\psi \sin\vartheta,$$

$$\mathrm{M_b}(11,5) = -1,$$
$$\mathrm{M_b}(11,10) = \cos\psi,$$
$$\mathrm{M_b}(11,11) = \sin\psi \sin\vartheta,$$

$$\mathrm{M_b}(12,4) = \cos\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(12,9) = 1,$$
$$\mathrm{M_b}(12,11) = \cos\vartheta,$$

$$\mathrm{M_b}(13,1) = k_{11},$$
$$\mathrm{M_b}(13,2) = k_{12},$$
$$\mathrm{M_b}(13,4) = k_{11}a \sin\Psi \sin\Theta - k_{12}a \cos\Psi \sin\Theta - \sin\Psi \tan\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(13,5) = -k_{11}a \cos\Psi \cos\Theta - k_{12}a \sin\Psi \cos\Theta + \cos\Psi \frac{1}{\cos^2\Theta},$$

$$\mathrm{M_b}(14,1) = k_{12},$$
$$\mathrm{M_b}(14,2) = k_{22},$$
$$\mathrm{M_b}(14,4) = k_{12}a \sin\Psi \sin\Theta - k_{22}a \cos\Psi \sin\Theta + \cos\Psi \tan\Theta,$$
$$\mathrm{M_b}(14,5) = -k_{12}a \cos\Psi \cos\Theta - k_{22}a \sin\Psi \cos\Theta + \sin\Psi \frac{1}{\cos^2\Theta}.$$

Iz enačbe (3.23) sledi:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{b}} = \mathbf{M}_{\mathrm{b}}^{-1} \boldsymbol{f}_{\mathrm{b}}. \tag{3.27}$$

Izrek o obstoju in enoličnosti rešitve (Križanič, 1991) zagotavlja obstoj in enoličnost rešitve enačbe (3.27), če je desna stran dovolj zvezna in zvezno odvedljiva funkcija. Stolpec $\boldsymbol{f}_{\mathrm{b}}$ ustreza tej zahtevi, inverz matrike $\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ pa le, če je matrika regularna. O tem odloča njena determinanta:

$$\begin{aligned} \operatorname{Det} \mathbf{M}_{\mathbf{b}} &= \left(A + ma^2\right)^2 \sin\vartheta \tan\Theta \cdot \\ &\cdot \frac{1}{8} \left\{ 2ak_{11} \left[\frac{3+\cos 2\Theta}{\cos\Theta} - 4ak_{22}\cos^2\Theta - 2\cos 2\Psi \frac{\sin^2\Theta}{\cos\Theta} \right] - \frac{8}{\cos^2\Theta} + \right. \\ &\left. + 4a \left[2ak_{12}^2 \cos^2\Theta - 2k_{12}\sin 2\Psi \frac{\sin^2\Theta}{\cos\Theta} + \frac{2k_{22}}{\cos\Theta}\left(1 - \sin^2\Psi \sin^2\Theta\right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Determinanta je različna od nič, razen pri $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ in $\Theta = 0$. Pogojno je lahko tudi izraz v zavitem oklepaju enak nič, a o tem, kdaj se to zgodi, težko rečemo kaj konkretnega. Prva dva sta singularna primera, ki pri reševanju ne delata težav, če izberemo ustrezno metodo reševanja. Tretja možnost, ko je Θ nič, nastane v primeru, da je normala ploskve kotaljenja v točki dotikališča vertikalna oziroma vzporedna z globalno osjo *Z*. To se zgodi bodisi tedaj, ko se kroglica kotali po vodoravni ravnini, ali pa ko kroglica zavzame prevojno točko ploskve kotaljenja. Prvi problem predstavlja zelo ozko različico naše naloge, v kateri nas veliko bolj zanimajo ukrivljene ploskve. Rešitev je zelo preprosta; že v začetku izpeljav upoštevamo, da je kot Θ enak nič in enačbe zapišemo na novo. Ob spremljanju izpeljave za poljubno ploskev lahko to hitro storimo in tako izpeljemo enačbe, ki veljajo samo za kotaljenje po vodorani ravnini. Zato teh enačb na tem mestu ne zapisujemo. Drugi problem – kroglica zavzame prevojno točko – je singularen problem, ki ga metode numerične integracije v *Matlab*-u dopuščajo, če le ne nastopi v začetnem koraku. Tej začetni težavi se lahko izognemo tako, da za začetno lego dotikališča kroglice s podlago izberemo točko, ki je vsaj malo izmaknjena iz prevojne točke.

3.2 Kotaljenje s podrsavanjem

Pri kotaljenju s podrsavanjem je hitrost delca, ki se trenutno nahaja v dotikališču, različna od nič. Tudi v primeru podrsavanja mora biti komponenta hitrosti v normalni smeri na ploskev kotaljenja enaka nič:

$$v_{Bz} = 0. \tag{3.29}$$

Zato vektor hitrosti v dotikališču leži v tangentni ravnini na ploskev kotaljenja:

$$\boldsymbol{v}_B = v_{Bx}\boldsymbol{e}_x + v_{By}\boldsymbol{e}_y. \tag{3.30}$$

Smer hitrosti dotikališča lahko povežemo s silo trenja. Trenje zavira gibanje, torej je smer sile trenja nasprotno usmerjena kot vektor hitrosti v dotikališču. Drugo kinematično vez, ki velja med podrsavanjem, potem lahko zapišemo kot

$$\frac{\boldsymbol{v}_B}{|\boldsymbol{v}_B|} = -\frac{\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{T}|}. \tag{3.31}$$

Ta vektorski pogoj lahko zapišemo tudi drugače; vektorja dotikališčne hitrosti in sile trenja zapišemo v komponentni obliki – upoštevamo (3.30) in (3.02):

$$\frac{v_{Bx}\boldsymbol{e}_x + v_{By}\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2}} = -\frac{R_x\boldsymbol{e}_x + R_y\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}. \tag{3.32}$$

Potem je

$$\frac{v_{Bx}}{\sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2}} = -\frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}, \qquad \frac{v_{By}}{\sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2}} = -\frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}. \tag{3.33}$$

Iz enačb (3.33) dobimo:

$$\frac{v_{By}}{v_{Bx}} = \frac{R_y}{R_x}. \tag{3.34}$$

Če komponenti hitrosti dotikališča preko enačb (2.61) nadomestimo s težiščnimi hitrostmi, ki so osnovne neznanke naloge, dobimo končno obliko pogoja:

$$\frac{v_y + a\,\Omega_x}{v_x - a\,\Omega_y} = \frac{R_y}{R_x}. \tag{3.35}$$

Tretjo kinematično vez med podrsavanjem predstavlja Coulombova enačba (3.04); zapisana s komponentami reakcijske sile ima obliko

$$\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \mu R_z, \qquad R_z > 0. \tag{3.36}$$

Prvega od kinematičnih pogojev kotaljenja s podrsavanjem (3.29) zlahka vključimo v sistem gibalnih enačb, druga dva – (3.35) in (3.36) – pa nekoliko težje. Enačbe se močno poenostavijo, če namesto reakcij R_x, R_y ter dotikališčnih hitrosti v_{Bx}, v_{By} v sistem enačb vpeljemo nove spremenljivke:

- velikost sile trenja $T = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$;
- kot α, ki ga vektor sile trenja $\boldsymbol{T}$ oklepa z baznim vektorjem $\boldsymbol{e}_x$ izbranega koordinatnega sistema;
- velikost dotikališčne hitrosti $v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2}$ in
- kot β, ki ga vektor dotikališčne hitrosti $\boldsymbol{v}_B$ oklepa z baznim vektorjem $\boldsymbol{e}_x$ izbranega koordinatnega sistema.

Potem velja:

$$R_x = T\cos\alpha, \qquad R_y = T\sin\alpha, \tag{3.37}$$

in

$$v_{Bx} = v_B\cos\beta, \qquad v_{By} = v_B\sin\beta. \tag{3.38}$$

Pogoj (3.34) izvira iz zahtevka, da sta vektorja sile trenja $\boldsymbol{T}$ in hitrosti dotikališča $\boldsymbol{v}_B$ kolinearna in nasprotno usmerjena. Glede na definicijo kotov α in β potem lahko zapišemo:

$$\beta = \pi + \alpha. \tag{3.39}$$

Komponenti hitrosti dotikališča tako dobita obliko:

$$v_{Bx} = v_B \cos(\pi + \alpha) = -v_B \cos\alpha, \qquad v_{By} = v_B \sin(\pi + \alpha) = -v_B \sin\alpha. \tag{3.40}$$

Štiri količine R_x, R_y, v_x in v_y smo zamenjali s tremi ugodnejšimi T, v_B in α. Ob tem smo avtomatično zadostili kinematičnemu pogoju (3.34):

$$\frac{-v_B \sin\alpha}{-v_B \cos\alpha} = \tan\alpha \quad \equiv \quad \frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \tan\alpha, \tag{3.41}$$

Coulombov pogoj (3.36) pa ob vpeljavi novih spremenljivk ohranja preprosto linearno obliko:

$$T = \mu R_z. \tag{3.42}$$

Komponente vektorja težiščne hitrosti, ki jih potrebujemo v gibalnih enačbah, zapišemo s komponentami dotikališčne hitrosti preko enačb (2.61):

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_x - a\Omega_y = -v_B \cos\alpha, \\ v_{By} &= v_y + a\Omega_x = -v_B \sin\alpha, \\ v_{Bz} &= v_z. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Težiščni hitrosti v smereh x in y sta

$$\begin{aligned} v_x &= -v_B \cos\alpha + a\Omega_y, \\ v_y &= -v_B \sin\alpha - a\Omega_x, \end{aligned} \tag{3.44}$$

pri določitvi normalne komponente težiščne hitrosti pa upoštevamo kinematični pogoj (3.29):

$$v_z = 0. \tag{3.45}$$

Komponente vektorja težiščne hitrosti v gibalnih enačbah nastopata v prvih odvodih po času. Ker ju bomo nadomestili z izrazoma (3.44), slednji enačbi odvajamo po času

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\dot{v}_B \cos\alpha + \dot{\alpha} v_B \sin\alpha + a\dot{\Omega}_y, \\ \dot{v}_y &= -\dot{v}_B \sin\alpha - \dot{\alpha} v_B \cos\alpha - a\dot{\Omega}_x. \end{aligned} \tag{3.46}$$

V izreku o gibalni količini (2.79) komponenti težiščne hitrosti v_x in v_y zamenjamo z v_B in α, tako kot navajajo enačbe (3.44) in (3.46). Komponenti reakcijske sile R_x in R_y pa nadomestimo z izrazoma (3.37) in dobimo:

$$\begin{aligned}
&\left(-\dot{v}_B \cos\alpha + \dot{\alpha} v_B \sin\alpha + a\dot{\Omega}_y\right) - \dot{\Psi} m\left(-v_B \sin\alpha - a\Omega_x\right)\cos\Theta - \dot{\Theta} m v_z = \\
&\quad = T\cos\alpha - mg\sin\Theta - \mu_z 2\pi a^2\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y - w_x\right), \\
&m\left(-\dot{v}_B \sin\alpha - \dot{\alpha} v_B \cos\alpha - a\dot{\Omega}_x\right) + \dot{\Psi} m\left[\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\right)\cos\Theta - v_z\sin\Theta\right] = \\
&\quad = T\sin\alpha - \mu_z 2\pi a^2\left(-v_B\sin\alpha - a\Omega_x - w_y\right), \\
&m\dot{v}_z + \dot{\Psi} m\left(-v_B\sin\alpha - a\Omega_x\right)\sin\Theta + \dot{\Theta} m\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\right) = \\
&\quad = R_z - mg\cos\Theta - \mu_z 2\pi a^2\left(v_z - w_z\right).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Med podrsavanjem velja kinematični pogoj (3.42); zato je

$$R_z = \frac{1}{\mu} T. \tag{3.48}$$

Izraz za R_z upoštevamo v tretji enačbi izreka o gibalni količini (3.47) in iz nje izrazimo velikost sile trenja T:

$$\begin{aligned}
T = {} & \mu m\dot{v}_z - \dot{\Psi}\mu m\left(v_B\sin\alpha + a\Omega_x\right)\sin\Theta + \dot{\Theta}\mu m\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\right) + \\
& + \mu mg\cos\Theta + \mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z - w_z\right).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Dobljeni T vstavimo v prvi dve enačbi izreka o gibalni količini (3.47):

$$\begin{aligned}
&\left(-\dot{v}_B \cos\alpha + \dot{\alpha} v_B \sin\alpha + a\dot{\Omega}_y\right) - \dot{\Psi} m\left(-v_B \sin\alpha - a\Omega_x\right)\cos\Theta - \dot{\Theta} m v_z = \\
&\quad = \Big[\mu m\dot{v}_z - \dot{\Psi}\mu m\left(v_B\sin\alpha + a\Omega_x\right)\sin\Theta + \dot{\Theta}\mu m\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\right) + \\
&\quad + \mu mg\cos\Theta + \mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z - w_z\right)\Big]\cos\alpha - mg\sin\Theta - \\
&\qquad - \mu_z 2\pi a^2\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y - w_x\right), \\
&m\left(-\dot{v}_B \sin\alpha - \dot{\alpha} v_B \cos\alpha - a\dot{\Omega}_x\right) + \dot{\Psi} m\left[\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\right)\cos\Theta - v_z\sin\Theta\right] = \\
&\qquad = \Big[\mu m\dot{v}_z - \dot{\Psi}\mu m\left(v_B\sin\alpha + a\Omega_x\right)\sin\Theta + \dot{\Theta}\mu m\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\right) + \\
&\qquad + \mu mg\cos\Theta + \mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z - w_z\right)\Big]\sin\alpha - \\
&\qquad\qquad - \mu_z 2\pi a^2\left(-v_B\sin\alpha - a\Omega_x - w_y\right).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Po obsežnem urejanju dobimo končno obliko enačb izreka o gibalni količini v smereh x in y

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Psi}m\left[-\cos\Theta\left(-v_B\sin\alpha-a\Omega_x\right)+\mu\cos\alpha\sin\Theta\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)\right]+\\
&\quad+\dot{\Theta}m\left[-v_z-\mu\cos\alpha\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)\right]-\dot{v}_Bm\cos\alpha+\\
&\quad+\dot{\alpha}mv_B\sin\alpha-\dot{v}_z\mu m\cos\alpha+\dot{\Omega}_yma=-mg\sin\Theta+\mu mg\cos\Theta\cos\alpha-\\
&\qquad-\mu_z2\pi a^2\left[\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y-w_x\right)-\mu\cos\alpha\left(v_z-w_z\right)\right],\\
&\dot{\Psi}m\left[\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)\cos\Theta-v_z\sin\Theta+\mu\sin\Theta\sin\alpha\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)\right]-\\
&\quad-\dot{\Theta}\mu m\sin\alpha\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)-\dot{v}_Bm\sin\alpha-\dot{\alpha}mv_B\cos\alpha-\\
&\quad-\dot{v}_z\mu m\sin\alpha-\dot{\Omega}_xma=\mu mg\cos\Theta\sin\alpha-\\
&\qquad-\mu_z2\pi a^2\left[\left(-v_B\sin\alpha-a\Omega_x-w_y\right)-\mu\sin\alpha\left(v_z-w_z\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

V izreku o vrtilni količini (2.89) upoštevamo izraze za reakcije (3.37):

$$
\begin{aligned}
&A\dot{\Omega}_x-\dot{\Psi}A\Omega_y\cos\Theta-\dot{\Theta}A\Omega_z=aT\sin\alpha,\\
&A\dot{\Omega}_y+\dot{\Psi}A\left(\Omega_x\cos\Theta-\Omega_z\sin\Theta\right)=-aT\cos\alpha,\\
&\dot{\Omega}_z+\dot{\Psi}\Omega_y\sin\Theta+\dot{\Theta}\Omega_x=0;
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

nato za silo trenja T vstavimo izraz (3.49):

$$
\begin{aligned}
&A\dot{\Omega}_x-\dot{\Psi}A\Omega_y\cos\Theta-\dot{\Theta}A\Omega_z=a\left[\mu m\dot{v}_z-\dot{\Psi}\mu m\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)\sin\Theta+\right.\\
&\quad\left.+\dot{\Theta}\mu m\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)+\mu mg\cos\Theta+\mu\mu_z2\pi a^2\left(v_z-w_z\right)\right]\sin\alpha,\\
&A\dot{\Omega}_y+\dot{\Psi}A\left(\Omega_x\cos\Theta-\Omega_z\sin\Theta\right)=-a\left[\mu m\dot{v}_z-\dot{\Psi}\mu m\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)\sin\Theta+\right.\\
&\quad\left.+\dot{\Theta}\mu m\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)+\mu mg\cos\Theta+\mu\mu_z2\pi a^2\left(v_z-w_z\right)\right]\cos\alpha,\\
&\dot{\Omega}_z+\dot{\Psi}\Omega_y\sin\Theta+\dot{\Theta}\Omega_x=0.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Izraze (3.53) še dodatno uredimo in dobimo končno obliko enačb izreka o vrtilni količini:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Psi}\left[\mu ma\sin\Theta\sin\alpha\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)-A\Omega_y\cos\Theta\right]+\\
&\quad+\dot{\Theta}\left[\mu ma\sin\alpha\left(v_B\cos\alpha-a\Omega_y\right)-A\Omega_z\right]-\mu ma\sin\alpha\,\dot{v}_z+A\dot{\Omega}_x=\\
&\quad=a\sin\alpha\left(\mu mg\cos\Theta+\mu\mu_z2\pi a^2\left(v_z-w_z\right)\right),\\
&\dot{\Psi}\left[-\mu ma\sin\Theta\cos\alpha\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)+A\Omega_x\cos\Theta-A\Omega_z\sin\Theta\right]+\\
&\quad+\dot{\Theta}\mu ma\cos\alpha\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)+\mu ma\cos\alpha\dot{v}_z+A\dot{\Omega}_y=\\
&\quad=-a\cos\alpha\left(\mu mg\cos\Theta+\mu\mu_z2\pi a^2\left(v_z-w_z\right)\right),\\
&\dot{\Psi}\Omega_y\sin\Theta+\dot{\Theta}\Omega_x+\dot{\Omega}_z=0.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Z zapisom kinematičnih vezi, ki pripadajo kotaljenju s podrsavanjem, in z ureditvijo gibalnih enačb smo kotaljenje kroglice s podrsavanjem natančno opisali. Preglejmo sedaj vse neznanke našega problema in enačbe, ki jih imamo na voljo.

Sistem enačb kotaljenja s podrsavanjem

Osnovne neznanke se zaradi zamenjave nekaterih količin razlikujejo od tistih pri kotaljenju brez podrsavanja. Iščemo

- tri težiščne koordinate: X_T, Y_T, Z_T;
- hitrost dotikališča v_B;
- kot α, ki ga sila trenja oklepa z baznim vektorjem $\boldsymbol{e}_x$;
- komponento težiščne hitrosti v_z;
- tri komponente telesnega vektorja kotne hitrosti: Ω_x, Ω_y, Ω_z;
- dva zasuka izbranega koordinatnega sistema Ψ in Θ
- ter še tri Eulerjeve zasuke telesnega koordinatnega sistema: ψ, ϑ, φ.

Odvisne neznanke pa so

- tri komponente vektorja kotne hitrosti izbranega koordinatnega sistema: ω_x, ω_y, ω_z, ki smo jih z osnovnimi neznankami zapisali v izrazih (2.34);
- sila trenja T, določena z izrazom (3.49) ter
- tri komponente reakcijske sile podlage: R_x, R_y, R_z, določene z izrazi (3.37) in (3.48).

Enačbe, ki jih imamo na voljo za določitev osnovnih neznank, so:

- tri diferencialne enačbe izreka o vrtilni količini (3.54);
- dve diferencialni enačbi izreka o gibalni količini v smereh x in y (3.51);
- algebrajski enačbi (3.45);
- tri diferencialne enačbe (2.57) za določitev težiščnih hitrosti;
- tri diferencialne enačbe (2.46), ki povezujejo Eulerjeve zasuke s komponentami telesnega vektorja kotnih hitrosti
- in še dve algebrajski enačbi (2.25), ki povezujeta zasuka Ψ in Θ z naklonskimi koeficienti tangentne ravnine; naklonska koeficienta sta pri tem samo navidezni neznanki, saj jih v vsakem trenutku lahko izračunamo po enačbah (2.17).

Zopet imamo opravka s 14 neznankami in 14 enačbami, ki se ponujajo v reševanje. Zapletenost enačb nas spet vodi v odločitev, da jih rešujemo numerično s programom *Matlab*. Podobno kot v primeru kotaljenja brez podrsavanja tudi tokrat algebrajske enačbe sistema spremenimo v diferencialne. To napravimo tako, da po času odvajamo enačbo (3.45), medtem ko smo odvode algebrajskih enačb (2.25) določili že med analizo enačb kotaljenja brez podrsavanja z izrazi (3.16). Odvod enačbe (3.45) po času je:

$$\dot{v}_z = 0. \tag{3.55}$$

Začetni problem: za 14 neznank

$$X_T, Y_T, Z_T, \quad \Psi, \Theta, \quad v_B, \alpha, v_z, \quad \psi, \vartheta, \varphi, \quad \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z \tag{3.56}$$

je na voljo 14 diferencialnih enačb prvega reda (3.54), (3.51), (3.55), (2.57), (2.46) in (3.16). Vse neznanke nastopajo le v prvih odvodih, zato so pripadajoči začetni pogoji zanje

$$\begin{aligned} t = t_0: \quad & X_T(t_0) = X_T^0, \quad Y_T(t_0) = Y_T^0, \quad Z_T(t_0) = Z_T^0, \\ & \Psi(t_0) = \Psi^0, \quad \Theta(t_0) = \Theta^0, \\ & v_B(t_0) = v_B^0, \quad \alpha(t_0) = \alpha^0, \quad v_z(t_0) = v_z^0, \\ & \psi(t_0) = \psi^0, \quad \vartheta(t_0) = \vartheta^0, \quad \varphi(t_0) = \varphi^0, \\ & \Omega_x(t_0) = \Omega_x^0, \quad \Omega_y(t_0) = \Omega_y^0, \quad \Omega_z(t_0) = \Omega_z^0. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Začetni pogoji zopet niso medsebojno neodvisni, zato izbira začetnih pogojev ni poljubna. Težiščne koordinate in začetne vrednosti zasukov Ψ in Θ so pogojene z začetno lego dotikališča kroglice in ploskve, po kateri drsi, tako kot to predpisujejo izrazi (3.20), (3.21) in (3.22). Začetno vrednost težiščne hitrosti v normalni smeri pa predpisuje kinematična vez (3.29) oziroma (3.45):

$$v_z^0 = 0. \tag{3.58}$$

Celoten sistem enačb, ki pripada kotaljenju kroglice s podrsavanjem, je zaradi večje preglednosti zapisan tudi v oknu 3, začetni pogoji z veznimi enačbami pa v oknu 4.

Okno 3: Sistem enačb kotaljenja s podrsavanjem.

Osnovne neznanke: $X_T, Y_T, Z_T, \Psi, \Theta, v_B, \alpha, v_z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$

$$[S_1] \quad \dot{X}_T\left(-\cos\Psi\cos\Theta\right)+\dot{Y}_T\left(-\sin\Psi\cos\Theta\right)+\dot{Z}_T\sin\Theta=-v_B\cos\alpha+a\Omega_y$$

$$[S_2] \quad \dot{X}_T\sin\Psi-\dot{Y}_T\cos\Psi=-v_B\sin\alpha-a\Omega_x$$

$$[S_3] \quad \dot{X}_T\cos\Psi\sin\Theta+\dot{Y}_T\sin\Psi\sin\Theta+\dot{Z}_T\cos\Theta=v_z$$

$$\begin{aligned}[S_4] \quad & \dot{\Psi}m\left[-\cos\Theta\left(-v_B\sin\alpha-a\Omega_x\right)+\mu\cos\alpha\sin\Theta\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)\right]+ \\ & +\dot{\Theta}m\left[-v_z-\mu\cos\alpha\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)\right]-\dot{v}_B m\cos\alpha+ \\ & +\dot{\alpha}mv_B\sin\alpha-\dot{v}_z\mu m\cos\alpha+\dot{\Omega}_y ma= \\ & =-mg\sin\Theta+\mu mg\cos\Theta\cos\alpha- \\ & -\mu_z 2\pi a^2\left[\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y-w_x\right)-\mu\cos\alpha\left(v_z-w_z\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[S_5] \quad & \dot{\Psi}m\left[\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)\cos\Theta-v_z\sin\Theta+\right. \\ & \left.+\mu\sin\Theta\sin\alpha\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)\right]-\dot{\Theta}\mu m\sin\alpha\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)- \\ & -\dot{v}_B m\sin\alpha-\dot{\alpha}mv_B\cos\alpha-\dot{v}_z\mu m\sin\alpha-\dot{\Omega}_x ma= \\ & =\mu mg\cos\Theta\sin\alpha- \\ & -\mu_z 2\pi a^2\left[\left(-v_B\sin\alpha-a\Omega_x-w_y\right)-\mu\sin\alpha\left(v_z-w_z\right)\right]\end{aligned}$$

$$[S_6] \quad \dot{v}_z=0$$

$$\begin{aligned}[S_7] \quad & \dot{\Psi}\left[\mu ma\sin\Theta\sin\alpha\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)-A\Omega_y\cos\Theta\right]+ \\ & +\dot{\Theta}\left[\mu ma\sin\alpha\left(v_B\cos\alpha-a\Omega_y\right)-A\Omega_z\right]-\mu ma\sin\alpha\,\dot{v}_z+A\dot{\Omega}_x= \\ & =a\sin\alpha\left(\mu mg\cos\Theta+\mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z-w_z\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[S_8] \quad & \dot{\Psi}\left[-\mu ma\sin\Theta\cos\alpha\left(v_B\sin\alpha+a\Omega_x\right)+A\Omega_x\cos\Theta-A\Omega_z\sin\Theta\right]+ \\ & +\dot{\Theta}\mu ma\cos\alpha\left(-v_B\cos\alpha+a\Omega_y\right)+\mu ma\cos\alpha\dot{v}_z+A\dot{\Omega}_y= \\ & =-a\cos\alpha\left(\mu mg\cos\Theta+\mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z-w_z\right)\right)\end{aligned}$$

$$[S_9] \quad \dot{\Psi}\Omega_y\sin\Theta+\dot{\Theta}\Omega_x+\dot{\Omega}_z=0$$

$$[S_{10}] \quad \dot{\Psi}\sin\Theta-\dot{\vartheta}\sin\psi+\dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta=\Omega_x$$

$$[S_{11}] \quad -\dot{\Theta}+\dot{\vartheta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta=\Omega_y$$

$$[S_{12}] \quad \dot{\Psi}\cos\Theta+\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta=\Omega_z$$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[S_{13}] \quad \dot{X}_T k_{11} + \dot{Y}_T k_{12} + \dot{\Psi}\left(k_{11} a \sin\Psi \sin\Theta - k_{12} a \cos\Psi \sin\Theta - \sin\Psi \tan\Theta\right) + $$
$$+\dot{\Theta}\left(-k_{11} a \cos\Psi \cos\Theta - k_{12} a \sin\Psi \cos\Theta + \cos\Psi \frac{1}{\cos^2\Theta}\right) = 0$$

$$[S_{14}] \quad \dot{X}_T k_{12} + \dot{Y}_T k_{22} + \dot{\Psi}\left(k_{12} a \sin\Psi \sin\Theta - k_{22} a \cos\Psi \sin\Theta + \cos\Psi \tan\Theta\right) + $$
$$+\dot{\Theta}\left(-k_{12} a \cos\Psi \cos\Theta - k_{22} a \sin\Psi \cos\Theta + \sin\Psi \frac{1}{\cos^2\Theta}\right) = 0$$

Odvisne neznanke: $T, R_x, R_y, R_z, v_x, v_y, \omega_x, \omega_y, \omega_z$

$$[O_1] \quad T = \mu m \dot{v}_z - \dot{\Psi}\mu m\left(v_B \sin\alpha + a\Omega_x\right)\sin\Theta + \dot{\Theta}\mu m\left(-v_B \cos\alpha + a\Omega_y\right) + $$
$$+\mu m g \cos\Theta + \mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z - w_z\right)$$

$$[O_2] \quad R_x = T\cos\alpha$$

$$[O_3] \quad R_y = T\sin\alpha$$

$$[O_4] \quad R_z = \frac{1}{\mu} T$$

$$[O_5] \quad v_x = -v_B \cos\alpha + a\Omega_y$$

$$[O_6] \quad v_y = -v_B \sin\alpha - a\Omega_x$$

$$[O_7] \quad \omega_x = \dot{\Psi}\sin\Theta$$

$$[O_8] \quad \omega_y = -\dot{\Theta}$$

$$[O_9] \quad \omega_z = \dot{\Psi}\cos\Theta$$

Pomožne enačbe:

$$[P_1] \quad w_x = -W_X \cos\Psi \cos\Theta - W_Y \sin\Psi \cos\Theta + W_Z \sin\Theta$$

$$[P_2] \quad w_y = W_X \sin\Psi - W_Y \cos\Psi$$

$$[P_3] \quad w_z = W_X \cos\Psi \sin\Theta + W_Y \sin\Psi \sin\Theta + W_Z \cos\Theta$$

$$[P_4] \quad k_{11} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[P_5] \quad k_{12} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$$

$$[P_6] \quad k_{22} = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$$

Okno 4: Začetni pogoji pri kotaljenju s podrsavanjem.

$t = t_0$:

$$X_B(t_0) = X_B^0, \qquad Y_B(t_0) = Y_B^0$$

$$v_B(t_0) = v_B^0, \qquad \alpha(t_0) = \alpha^0, \qquad v_z(t_0) = v_z^0$$

$$\psi(t_0) = \psi^0, \qquad \vartheta(t_0) = \vartheta^0, \qquad \varphi(t_0) = \varphi^0$$

$$\Omega_x(t_0) = \Omega_x^0, \qquad \Omega_y(t_0) = \Omega_y^0, \qquad \Omega_z(t_0) = \Omega_z^0$$

Vezne enačbe:

$$Z_B^0 = f\left(X_B^0, Y_B^0\right)$$

$$\tan \Psi^0 = \frac{k_2^0}{k_1^0}$$

$$\tan \Theta^0 = \sqrt{\left(k_1^0\right)^2 + \left(k_2^0\right)^2}$$

$$X_T^0 = X_B^0 + a \cos \Psi^0 \sin \Theta^0$$

$$Y_T^0 = Y_B^0 + a \sin \Psi^0 \sin \Theta^0$$

$$Z_T^0 = Z_B^0 + a \cos \Theta^0$$

$$v_z^0 = 0$$

3.2.1 Zapis sistema diferencialnih enačb v matrični obliki

Zaradi lažje priprave programov v *Matlab*-u tudi sistem enačb kotaljenja s podrsavanjem [S_1]–[S_{14}] zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{M}_s \dot{\boldsymbol{x}}_s = \boldsymbol{f}_s. \tag{3.59}$$

$\boldsymbol{x}_\mathrm{s}$ je stolpec neznank

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{s} = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \\ \Psi \\ \Theta \\ v_B \\ \alpha \\ v_z \\ \psi \\ \vartheta \\ \varphi \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

$\boldsymbol{f}_\mathrm{s}$ je stolpec desnih strani

$$\boldsymbol{f}_\mathrm{s} = \begin{bmatrix} -v_B \cos\alpha + a\Omega_y \\ -v_B \sin\alpha - a\Omega_x \\ v_z \\ -mg\sin\Theta + \mu mg\cos\Theta\cos\alpha - \\ \qquad -\mu_z 2\pi a^2 \left[\left(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y - w_x\right) - \mu\cos\alpha\left(v_z - w_z\right)\right] \\ \mu mg\cos\Theta\sin\alpha - \\ \qquad -\mu_z 2\pi a^2 \left[\left(-v_B\sin\alpha - a\Omega_x - w_y\right) - \mu\sin\alpha\left(v_z - w_z\right)\right] \\ 0 \\ a\sin\alpha\left[\mu mg\cos\Theta + \mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z - w_z\right)\right] \\ -a\cos\alpha\left[\mu mg\cos\Theta + \mu\mu_z 2\pi a^2\left(v_z - w_z\right)\right] \\ 0 \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

M$_s$ je 'masna' matrika sistema. Matrika je kvadratna in nesimetrična. Zaradi pomanjkanja prostora jo zopet zapišimo samo shematsko (pika '.' označuje ničelno komponento, X pa neničelno):

$$\mathbf{M}_s=\begin{bmatrix}
X & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
X & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & X & X & X & . & X & . & . & . & X & X & . \\
. & . & . & . & . & . & X & . & . & . & . & X & X & . \\
. & . & . & . & . & . & . & X & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & X & X & . & . & X & . & . & . & X & . & . \\
. & . & . & X & X & . & . & X & . & . & . & . & X & . \\
. & . & . & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & X \\
. & . & . & X & . & . & . & . & . & X & X & . & . & . \\
. & . & . & . & X & . & . & . & . & X & X & . & . & . \\
. & . & . & X & . & . & . & . & X & . & X & . & . & . \\
X & X & . & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
X & X & . & X & X & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}. \qquad (3.62)$$

Neničelne komponente matrike so:

$$\mathrm{M}_s(1,1) = -\cos\Psi\cos\Theta,$$
$$\mathrm{M}_s(1,2) = -\sin\Psi\cos\Theta,$$
$$\mathrm{M}_s(1,3) = \sin\Theta,$$

$$\mathrm{M}_s(2,1) = \sin\Psi,$$
$$\mathrm{M}_s(2,2) = -\cos\Psi,$$

$$\mathrm{M}_s(3,1) = \cos\Psi\sin\Theta,$$
$$\mathrm{M}_s(3,2) = \sin\Psi\sin\Theta,$$
$$\mathrm{M}_s(3,3) = \cos\Theta,$$

$$\mathrm{M}_s(4,4) = m\left[-\cos\Theta\left(-v_B\sin\alpha - a\,\Omega_x\right) + \mu\cos\alpha\sin\Theta\left(v_B\sin\alpha + a\,\Omega_x\right)\right],$$
$$\mathrm{M}_s(4,5) = m\left[-v_z - \mu\cos\alpha\left(-v_B\cos\alpha + a\,\Omega_y\right)\right],$$
$$\mathrm{M}_s(4,6) = -m\cos\alpha,$$
$$\mathrm{M}_s(4,7) = m v_B\sin\alpha,$$
$$\mathrm{M}_s(4,8) = -\mu m\cos\alpha,$$
$$\mathrm{M}_s(4,13) = ma,$$

$$\mathrm{M_s}(5,4) = m\Big[\big(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\big)\cos\Theta - v_z\sin\Theta + \mu\sin\Theta\sin\alpha\big(v_B\sin\alpha + a\Omega_x\big)\Big],$$

$$\mathrm{M_s}(5,5) = -\mu m\sin\alpha\big(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\big),$$

$$\mathrm{M_s}(5,6) = -m\sin\alpha,$$

$$\mathrm{M_s}(5,7) = -mv_B\cos\alpha,$$

$$\mathrm{M_s}(5,8) = -\mu m\sin\alpha,$$

$$\mathrm{M_s}(5,12) = -ma,$$

$$\mathrm{M_s}(6,8) = 1,$$

$$\mathrm{M_s}(7,4) = \mu ma\sin\Theta\sin\alpha\big(v_B\sin\alpha + a\Omega_x\big) - A\Omega_y\cos\Theta,$$

$$\mathrm{M_s}(7,5) = \mu ma\sin\alpha\big(v_B\cos\alpha - a\Omega_y\big) - A\Omega_z,$$

$$\mathrm{M_s}(7,8) = -\mu ma\sin\alpha,$$

$$\mathrm{M_s}(7,12) = A,$$

$$\mathrm{M_s}(8,4) = -\mu ma\sin\Theta\cos\alpha\big(v_B\sin\alpha + a\Omega_x\big) + A\Omega_x\cos\Theta - A\Omega_z\sin\Theta,$$

$$\mathrm{M_s}(8,5) = \mu ma\cos\alpha\big(-v_B\cos\alpha + a\Omega_y\big),$$

$$\mathrm{M_s}(8,8) = \mu ma\cos\alpha,$$

$$\mathrm{M_s}(8,13) = A,$$

$$\mathrm{M_s}(9,4) = \Omega_y\sin\Theta,$$

$$\mathrm{M_s}(9,5) = \Omega_x,$$

$$\mathrm{M_s}(9,14) = 1,$$

$$\mathrm{M_s}(10,4) = \sin\Theta,$$

$$\mathrm{M_s}(10,10) = -\sin\psi,$$

$$\mathrm{M_s}(10,11) = \cos\psi\sin\vartheta,$$

$$\mathrm{M_s}(11,5) = -1,$$

$$\mathrm{M_s}(11,10) = \cos\psi,$$

$$\mathrm{M_s}(11,11) = \sin\psi\sin\vartheta,$$

$$\mathrm{M_s}(12,4) = \cos\Theta,$$

$$\mathrm{M_s}(12,9) = 1,$$

$$\mathrm{M_s}(12,11) = \cos\vartheta,$$

$$\mathrm{M_s}(13,1) = k_{11},$$
$$\mathrm{M_s}(13,2) = k_{12},$$
$$\mathrm{M_s}(13,4) = k_{11} a \sin\Psi \sin\Theta - k_{12} a \cos\Psi \sin\Theta - \sin\Psi \tan\Theta,$$
$$\mathrm{M_s}(13,5) = -k_{11} a \cos\Psi \cos\Theta - k_{12} a \sin\Psi \cos\Theta + \cos\Psi \frac{1}{\cos^2\Theta},$$
$$\mathrm{M_s}(14,1) = k_{12},$$
$$\mathrm{M_s}(14,2) = k_{22},$$
$$\mathrm{M_s}(14,4) = k_{12} a \sin\Psi \sin\Theta - k_{22} a \cos\Psi \sin\Theta + \cos\Psi \tan\Theta,$$
$$\mathrm{M_s}(14,5) = -k_{12} a \cos\Psi \cos\Theta - k_{22} a \sin\Psi \cos\Theta + \sin\Psi \frac{1}{\cos^2\Theta}.$$

Iz (3.59) dobimo

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\mathrm{s} = \mathbf{M}_\mathrm{s}^{-1} \boldsymbol{f}_\mathrm{s}. \tag{3.63}$$

Zopet se vprašamo o obstoju in enoličnosti rešitve. Stolpec $\boldsymbol{f}_\mathrm{s}$ je sestavljen iz zveznih in odvedljivih funkcij, zato moramo preveriti le še regularnost matrike $\mathbf{M}_\mathrm{s}$. Determinanta $\mathbf{M}_\mathrm{s}$ je:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\,\mathbf{M}_\mathrm{s} &= A^2 m^2 v_B \sin\vartheta \sin\Theta \tan\Theta \cdot \\ &\cdot \frac{1}{8}\left\{ 2ak_{11}\left[\frac{3+\cos 2\Theta}{\cos\Theta} - 4ak_{22}\cos^2\Theta - 2\cos 2\Psi \frac{\sin^2\Theta}{\cos\Theta}\right] - \frac{8}{\cos^2\Theta} + \right. \\ &\left. + 4a\left[2ak_{12}^2\cos^2\Theta - 2k_{12}\sin 2\Psi \frac{\sin^2\Theta}{\cos\Theta} + \frac{2k_{22}}{\cos\Theta}\left(1-\sin^2\Psi\sin^2\Theta\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Determinanta je nič le pri $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, $\Theta = 0$ in pri $v_B = 0$. Pogojno je lahko tudi izraz v zavitem oklepaju enak nič; o tem, kdaj se to zgodi, pa težko rečemo kaj konkretnega. O prvih treh primerih smo pisali že v razdelku o kotaljenju brez podrsavanja. Četrta možnost ($v_B = 0$) pa je povsem običajna. V trenutku, ko kroglica preide iz kotaljenja brez podrsavanja v kotaljenje s podrsavanjem, moramo začeti račun z enačbami kotaljenja s podrsavanjem, hitrost v_B pa je pri tem še vedno enaka nič, zaradi česar je matrika $\mathbf{M}_\mathrm{s}$ neregularna. Numerično rešitev te težave podajamo v opišemo razdelku.

3.3 Enačbe pri izmeničnem kotaljenju s in brez podrsavanja

Možen scenarij dogodkov med kotaljenjem kroglice po poljubni podlagi smo nakazali že v uvodnem razmišljanju tega poglavja. Kroglica se lahko nekaj časa kotali brez podrsavanja, nato zdrsne in se kotali s podrsavanjem, kasneje morda spet preide v kotaljenje brez podrsavanja. Tako med kotaljenjem brez podrsavanja kot tudi med kotaljenjem s podrsavanjem pa se lahko zgodi, da se odlepi od podlage in poleti. Slednjo možnost bomo obravnavali v naslednjem razdelku, v tem pa se posvetimo izmenjavanju kotaljenja s in brez podrsavanja.

Denimo, da se začne kroglica kotaliti brez podrsavanja. Kotaljenje vodijo enačbe iz okna 1. Kroglica se brez podrsavanja kotali, če je izpolnjen pogoj (3.03). Zapišimo ga še enkrat, tokrat z bolj natančno opredelitvijo koeficienta trenja:

$$\frac{T}{N} < \mu_s. \tag{3.65}$$

Z μ_s smo označili statični koeficient trenja (ali koeficient lepenja), ki predstavlja mejno trenjsko sposobnost kontaktne površine kroglice in podlage. Čim je razmerje trenjske in normalne sile enako μ_s, pa se začne podrsavanje:

$$\frac{T}{N} = \mu_s \quad \rightarrow \quad \text{podrsavanje.} \tag{3.66}$$

Čas, ko se to zgodi, označimo s $t_{\mathrm{b}\rightarrow\mathrm{s}}$.

Med podrsavanjem silo trenja in normalno silo podlage povezuje dinamični koeficient trenja (ali samo koeficient trenja), označimo ga z μ_d:

$$T = \mu_d N. \tag{3.67}$$

Dinamični koeficient trenja se nekoliko razlikuje od statičnega (odvisno od materialov, ki sta v stiku), zato moramo pri uporabi enačb kotaljenja s podrsavanjem paziti, da uporabimo pravo vrednost.

Kotaljenje s podrsavanjem vodijo enačbe v oknu 3. Vrednosti količin

$$X_T, Y_T, Z_T, \Psi, \Theta, v_x, v_y, v_z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z \tag{3.68}$$

ob času $t_{b\to s}=t_0$ predstavljajo začetne vrednosti za kotaljenje s podrsavanjem:

$$X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, \Psi^0, \Theta^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0, \psi^0, \vartheta^0, \varphi^0, \Omega_x^0, \Omega_y^0, \Omega_z^0. \tag{3.69}$$

Ti začetni pogoji niso popolnoma v skladu s tistimi v oknu 4. Namesto začetnih težiščnih hitrosti v smereh x in y med začetnimi pogoji kotaljenja s podrsavanjem potrebujemo začetno hitrost v dotikališču v_B^0 in začetni kot delovanja sile trenja α^0. Kot α je pri kotaljenju brez podrsavanja odvisna spremenljivka. Njegovo vrednost α^0 ob začetku kotaljenja s podrsavanjem izračunamo s pomočjo enačbe (3.37):

$$\cos\alpha^0 = \frac{R_x^0}{T^0}, \qquad \sin\alpha^0 = \frac{R_y^0}{T^0}, \qquad T^0 = \sqrt{\left(R_x^0\right)^2 + \left(R_y^0\right)^2}. \tag{3.70}$$

R_x^0, R_y^0 so vrednosti reakcij ob koncu kotaljenja brez podrsavanja – ob času $t_{b\to s}$, tako kot predpisujejo enačbe v oknu 1.

Ker se je kroglica do časa $t_{b\to s}$ kotalila brez podrsavanja, je začetna hitrost dotikališča ob začetku podrsavanja enaka 0:

$$v_B^0 = 0. \tag{3.71}$$

Determinanto masne matrike sistema diferencialnih enačb kotaljenja s podrsavanjem podaja enačba (3.64). Determinanta je premosorazmerna s hitrostjo v_B, kar pomeni da je masna matrika ob začetku podrsavanja singularna. Metoda numerične integracije, uporabljena v *Matlab*-u, ne dopušča singularnosti masne matrike v prvem koraku. To pomeni, da z izbrano metodo ne bi mogli napraviti prvega koraka integracije in tako sprožiti začetka računa. Natančna obravnava dogajanja ob prehodu iz kotaljenja brez podrsavanja v kotaljenje s podrsavanjem, ki bi sistematično zajela tudi zgoraj omenjeni problem, presega namen te naloge. Zato težavo odpravimo preprosto in učinkovito z majhno perturbacijo začetne hitrosti. Ker vemo, da je med podrsavanjem hitrost v dotikališču različna od nič, tudi začetni vrednosti v_B^0 predpišemo neko vrednost, ki pa mora biti dovolj majhna (dovolj blizu nič), da ne vpliva na rezultate. S tem metodi omogočimo izračun inverza v prvem integracijskem koraku, od tod naprej pa račun teče normalno, če je le hitrost v dotikališču različna od nič. Za majhno vrednost začetne hitrosti dotikališča smo v programu uporabili vrednost 10^{-8}.

Zdaj se kroglica kotali s podrsavanjem. Med podrsavanjem je hitrost dotikališča različna od nič. V nekem trenutku, označimo ga s t_{s0}, pa lahko zopet postane enaka nič: $v_B = 0$. S tem je izpolnjen eden od pogojev za kotaljenje brez podrsavanja, o tem ali se bo kroglica v nadaljevanju res gibala brez podrsavanja, pa odloča še razmerje sile trenja in normalne sile podlage – pogoj (3.65). Če ta pogoj ni izpolnjen, se bo kroglica tudi v nadaljevanju gibala s podrsavanjem, dotikališčna hitrost pa bo najbrž spremenila predznak.

Ugotavljanje prehoda iz kotaljenja s podrsavanjem v kotaljenje brez podrsavanja poteka takole: ob času t_{s0} izračunamo reakcijske sile podlage T_{b} in N_{b}, kakršni podajajo enačbe kotaljenja brez podrsavanja (3.07):

$$\begin{aligned}
R_x^{\mathrm{b}} &= m\dot{v}_x - \dot{\Psi} m v_y \cos\Theta - \dot{\Theta} m v_z + mg\sin\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_x - w_x\right), \\
R_y^{\mathrm{b}} &= m\dot{v}_y + \dot{\Psi} m \left(v_x \cos\Theta - v_z \sin\Theta\right) + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_y - w_y\right), \\
R_z^{\mathrm{b}} &= m\dot{v}_z + \dot{\Psi} m v_y \sin\Theta + \dot{\Theta} m v_x + mg\cos\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_z - w_z\right), \\
T_{\mathrm{b}} &= \sqrt{\left(R_x^{\mathrm{b}}\right)^2 + \left(R_y^{\mathrm{b}}\right)^2}, \\
N_{\mathrm{b}} &= R_z^{\mathrm{b}}.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Vrednost odvodov komponent težiščnih hitrosti ter zasukov Ψ in Θ v enačbah (3.72) določimo z rešitvijo sistema (3.27), ki velja za kotaljenje brez podrsavanja. Za neodvajane količine pa upoštevamo vrednosti, ki jih poznamo pri času t_{s0} ob koncu podrsavanja. Težiščni hitrosti v smereh x in y določimo s pomočjo enačb (3.44),

$$\begin{aligned}
v_x &= -v_B \cos\alpha + a\,\Omega_y, \\
v_y &= -v_B \sin\alpha - a\,\Omega_x
\end{aligned} \tag{3.73}$$

s tem, da upoštevamo, da v njih velja $v_B = 0$.

Če za razmerje sil T_{b} in N_{b} velja

$$\frac{T_{\mathrm{b}}}{N_{\mathrm{b}}} < \mu_s, \tag{3.74}$$

se bo kroglica v nadaljevanju gibanja kotalila brez podrsavanja. Gibanje od tu naprej vodijo enačbe iz okna 1, čas t_{s0} zato označimo s $t_{s\to b}$. Vrednosti količin

$$X_T, Y_T, Z_T, \Psi, \Theta, v_B, \alpha, v_z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z \tag{3.75}$$

ob času $t_{s\to b}$ so začetne vrednosti kotaljenja brez podrsavanja, ki jih podaja okno 2:

$$X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, \Psi^0, \Theta^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0, \psi^0, \vartheta^0, \varphi^0, \Omega_x^0, \Omega_y^0, \Omega_z^0. \tag{3.76}$$

Začetni vrednosti $v_x{}^0$ in $v_y{}^0$ določimo s pomočjo enačb (3.73).

Če pa za razmerje sil T_b in N_b velja

$$\frac{T_b}{N_b} \geq \mu_s, \tag{3.77}$$

je razmerje sil pri času t_{s0} tako, da se bo nadaljevalo kotaljenje s podrsavanjem – enačbe v oknu 3 ostajajo v veljavi.

3.4 Konec faze kotaljenja

Pri kotaljenju po poljubni podlagi se lahko kaj hitro zgodi, da kroglica zgubi stik s podlago in poleti. Pri tem hitrost težišča v smeri normale v_z postane različna od nič. Ker pa smo pogoj $v_z = 0$ pri obeh vrstah kotaljenja vgradili v sistem enačb kot kinematično vez, ga ne moremo uporabiti za kontrolo odlepitve. Ostane nam še druga možnost – kontrola normalne sile podlage, to je komponente R_z reakcijske sile. Ko ta dobi negativen predznak, pride do odlepitve, kar pomeni, da moramo končati moramo z analizo kotaljenja in pričeti z reševanjem enačb leta kroglice.

4 LET PO ZRAKU IN TRK S PODLAGO

4.1 Let kroglice po zraku

Gibanje kroglice po zraku lahko obravnavamo kot poseben primer kotaljenja, pri katerem kroglica ni v stiku s podlago. Reakcijska sila podlage je zato enaka nič:

$$\boldsymbol{R} = R_x \boldsymbol{e}_x + R_y \boldsymbol{e}_y + R_z \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0} \qquad \Rightarrow \qquad R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0. \tag{4.01}$$

Z izgubo stika s podlago se izgubi tudi definicija normale na ploskev kotaljenja ter tangentne ravnine na ploskev kotaljenja, s tem pa tudi potreba po vpeljavi izbranega koordinatnega sistema. Med letom lahko preprosto predpostavimo, da se izbrani koordinatni sistem ujema z globalnim, s tem pa tudi že predpišemo velikost zasukov Ψ in Θ

$$\Psi = \pi, \qquad \Theta = 0 \tag{4.02}$$

ter njunih odvodov

$$\dot{\Psi} = 0, \qquad \dot{\Theta} = 0. \tag{4.03}$$

Ker se izbrani koordinatni sistem ujema s prostorskim, lahko vse količine, ki smo jih zapisovali glede na izbrani koordinatni sistem, zapišemo v globalnem tako, da v enačbah upoštevamo:

$$v_x = V_X, \quad v_y = V_Y, \quad v_z = V_Z, \qquad \Omega_x = \Omega_X, \quad \Omega_y = \Omega_Y, \quad \Omega_z = \Omega_Z. \tag{4.04}$$

Z upoštevanjem kinematičnega pogoja (4.01) in poenostavitev (4.02) ter (4.03) dobijo gibalne enačbe zelo preprosto obliko. Ponovno jih izpeljemo iz izrekov o gibalni in vrtilni količini. V zapisu obeh izrekov upoštevamo nove oznake (4.04).

Enačbe izreka o gibalni količini (2.79) se poenostavijo v

$$\begin{aligned} m\dot{V}_X &= -\mu_z 2\pi a^2 \left(V_X - W_X\right), \\ m\dot{V}_Y &= -\mu_z 2\pi a^2 \left(V_Y - W_Y\right), \\ m\dot{V}_z &= -mg - \mu_z 2\pi a^2 \left(V_Z - W_Z\right). \end{aligned} \tag{4.05}$$

Enačbe izreka o vrtilni količini (2.89) pa se poenostavijo v

$$\begin{aligned} A\dot{\Omega}_X &= 0, \\ A\dot{\Omega}_Y &= 0, \\ A\dot{\Omega}_Z &= 0. \end{aligned} \tag{4.06}$$

Sistem enačb leta kroglice po zraku

Z izločitvijo kotov Ψ in Θ iz enačb se zmanjša število neznank. Ob upoštevanju novih oznak (4.04) ostanejo še:

- tri težiščne koordinate, zapisane v prostorskem koordinatnem sistemu: X_T, Y_T, Z_T;
- tri komponente hitrosti težišča, zapisane v globalnem koordinatnem sistemu: V_X, V_Y, V_Z;
- tri komponente telesnega vektorja kotne hitrosti, zapisane v globalnem koordinatnem sistemu: Ω_X, Ω_Y, Ω_Z;
- ter še trije Eulerjevi zasuki telesnega koordinatnega sistema: ψ, ϑ, φ.

Skupno imamo na voljo:

- tri diferencialne enačbe izreka o vrtilni količini (4.06);
- tri diferencialne enačbe izreka o gibalni količini (4.05);
- tri diferencialne enačbe (2.57) za določitev težiščnih hitrosti; ob upoštevanju poenostavitve (4.02) in oznak (4.04) dobijo obliko:

$$\begin{aligned} \dot{X}_T &= V_X, \\ \dot{Y}_T &= V_Y, \\ \dot{Z}_T &= V_Z; \end{aligned} \tag{4.07}$$

- ter še tri diferencialne enačbe (2.46), ki povezujejo Eulerjeve zasuke s komponentami telesnega vektorja kotnih hitrosti; tudi v teh upoštevamo (4.02), (4.03) in (4.04):

$$\begin{aligned}
\Omega_X &= -\dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi\,\sin\vartheta, \\
\Omega_Y &= \vartheta\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\,\sin\vartheta, \\
\Omega_Z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta.
\end{aligned} \tag{4.08}$$

Za 12 neznanih količin:

$$X_T, Y_T, Z_T, \quad V_X, V_Y, V_Z, \quad \psi, \vartheta, \varphi, \quad \Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z \tag{4.09}$$

imamo tako na voljo 12 diferencialnih enačb prvega reda (4.05), (4.06), (4.07) in (4.08). Vse neznanke nastopajo v prvih odvodih, zato so pripadajoči začetni pogoji zanje

$$\begin{aligned}
t = t_0: \quad & X_T(t_0) = X_T^0, \quad Y_T(t_0) = Y_T^0, \quad Z_T(t_0) = Z_T^0, \\
& V_X(t_0) = V_X^0, \quad V_Y(t_0) = V_Y^0, \quad V_Z(t_0) = V_Z^0, \\
& \psi(t_0) = \psi^0, \quad \vartheta(t_0) = \vartheta^0, \quad \varphi(t_0) = \varphi^0, \\
& \Omega_X(t_0) = \Omega_X^0, \quad \Omega_Y(t_0) = \Omega_Y^0, \quad \Omega_Z(t_0) = \Omega_Z^0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Vseh dvanajst začetnih vrednosti je poljubnih. Po vzoru enačb kotaljenja po ploskvi tudi enačbe leta kroglice po zraku združimo v preglednem zapisu v oknu 5.

Okno 5: Sistem enačb za let kroglice po zraku s pripadajočimi začetnimi pogoji.

Osnovne neznanke: $X_T, Y_T, Z_T, V_X, V_Y, V_Z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z$

$[L_1] \quad \dot{X}_T = V_X$

$[L_2] \quad \dot{Y}_T = V_Y$

$[L_3] \quad \dot{Z}_T = V_Z$

$[L_4] \quad m\dot{V}_X = -\mu_z 2\pi a^2 \left(V_X - W_X\right)$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[L_5] \quad m\dot{V}_Y = -\mu_z 2\pi a^2 \left(V_Y - W_Y\right)$$

$$[L_6] \quad m\dot{V}_z = -mg - \mu_z 2\pi a^2 \left(V_Z - W_Z\right)$$

$$[L_7] \quad \dot{\Omega}_X = 0$$

$$[L_8] \quad \dot{\Omega}_Y = 0$$

$$[L_9] \quad \dot{\Omega}_Z = 0$$

$$[L_{10}] \quad \dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi \sin\vartheta = \Omega_X$$

$$[L_{11}] \quad \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi \sin\vartheta = \Omega_Y$$

$$[L_{12}] \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta = \Omega_Z$$

Začetni pogoji pri $t = t_0$:

$$X_T\left(t_0\right) = X_T^0, \quad Y_T\left(t_0\right) = Y_T^0, \quad Z_T\left(t_0\right) = Z_T^0,$$

$$V_X\left(t_0\right) = V_X^0, \quad V_Y\left(t_0\right) = V_Y^0, \quad V_Z\left(t_0\right) = V_Z^0,$$

$$\psi\left(t_0\right) = \psi^0, \quad \vartheta\left(t_0\right) = \vartheta^0, \quad \varphi\left(t_0\right) = \varphi^0,$$

$$\Omega_X\left(t_0\right) = \Omega_X^0, \quad \Omega_Y\left(t_0\right) = \Omega_Y^0, \quad \Omega_Z\left(t_0\right) = \Omega_Z^0.$$

4.1.1 Zapis sistema diferencialnih enačb v matrični obliki

Kljub temu, da je sistem diferencialnih enačb [L_1]–[L_9] zelo preprost in bi rešitve lahko dobili v analitični obliki, se odločimo, da ga bomo reševali numerično. Zato ga zapišimo še v matrični obliki:

$$\mathbf{M}_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{f}_1. \tag{4.11}$$

$\boldsymbol{x}_1$ je stolpec neznank:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \\ V_X \\ V_Y \\ V_Z \\ \psi \\ \vartheta \\ \varphi \\ \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

$\boldsymbol{f}_1$ je stolpec desnih strani:

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_z \\ -\mu_z 2\pi a^2 \left(V_X - W_X\right) \\ -\mu_z 2\pi a^2 \left(V_Y - W_Y\right) \\ -mg - \mu_z 2\pi a^2 \left(V_Z - W_Z\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

$\mathbf{M}_1$ je masna matrika sistema (ničelne komponente so označene s piko '.', neničelne pa so zapisane):

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & m & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & m & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & m & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & -\sin\psi & \cos\psi\sin\vartheta & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \cos\psi & \sin\psi\sin\vartheta & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & \cos\vartheta & . & . & . \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Iz (4.11) potem sledi

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \mathbf{M}_1^{-1}\boldsymbol{f}_1. \tag{4.15}$$

Determinanta masne matrike:

$$\mathrm{Det}\,\mathbf{M}_1 = m^2 \sin\vartheta \tag{4.16}$$

je različna od nič povsod razen pri $\vartheta = 0; \pi; 2\pi; \ldots$ To so vse singularni primeri, o katerih smo govorili že pri masnih matrikah kotaljenja s in brez podrsavanja. Masna matrika je torej v splošnem nesingularna. Zato in ker je stolpec $\boldsymbol{f}_1$ sestavljen iz zveznih in odvedljivih funkcij, obstaja enolična rešitev sistema (4.11).

4.2 Zaključek faze leta kroglice po zraku

Let kroglice po zraku se neizbežno konča s trkom ob podlago. Vrednosti osnovnih spremenljivk v času tik pred trkom predstavljajo začetne vrednosti za nadaljnjo analizo gibanja kroglice – gibanja med trkom. Če želimo poznati te vrednosti, moramo zaznati trenutek, ko katerikoli od delcev na površini krogle trči ob podlago. Poljuben delec K na površini krogle je določen s telesnimi koordinatami (ξ_K, η_K, ζ_K), ki se med gibanjem ne spreminjajo. V vsakem trenutku leta za vsako trojko (ξ_K, η_K, ζ_K) določimo globalne koordinate $(X_K(t), Y_K(t), Z_K(t))$ s pomočjo enačb (2.47) in (2.48) ter enačbe (2.49), v kateri pri komponentah transformacijske matrike $\mathbf{R}_3$ upoštevamo, da med letom velja $\Psi = \pi$, $\Theta = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_K = X_K \mathbf{E}_X + Y_K \mathbf{E}_Y + Z_K \mathbf{E}_Z, \\
&\mathbf{r}_T = X_T \mathbf{E}_X + Y_T \mathbf{E}_Y + Z_T \mathbf{E}_Z, \qquad \boldsymbol{\rho}_K = \xi_K \mathbf{e}_1 + \eta_K \mathbf{e}_2 + \zeta_K \mathbf{e}_3, \\
&X_K = X_T + \xi_K \left(\cos\psi \cos\vartheta \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi\right) - \\
&\quad -\eta_K \left(\cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi\right) + \zeta_K \cos\psi \sin\vartheta, \\
&Y_K = Y_T + \xi_K \left(\sin\psi \cos\vartheta \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi\right) - \\
&\quad -\eta_K \left(\sin\psi \cos\vartheta \sin\varphi - \cos\psi \cos\varphi\right) + \zeta_K \sin\psi \sin\vartheta, \\
&Z_K = Z_T - \xi_K \sin\vartheta \cos\varphi + \eta_K \sin\vartheta \sin\varphi + \zeta_K \cos\vartheta.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dogodek, ko poljubna točka na površini kroglice (X_K, Y_K, Z_K) sovpade s točko (X_B, Y_B, Z_B) na ploskvi, to je, ko je izpolnjen pogoj $Z_K = f(X_K, Y_K)$, proglasimo za trk kroglice s podlago, čas, pri katerem se to zgodi, pa označimo s t_L:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_B = X_B \mathbf{E}_X + Y_B \mathbf{E}_Y + f\left(X_B, Y_B\right) \mathbf{E}_Z = \mathbf{r}_K\left(t_L\right), \\
&X_B = X_K\left(t_L\right), \qquad Y_B = Y_K\left(t_L\right), \qquad Z_B = Z_K\left(t_L\right) = f\left(X_K, Y_K\right).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Za opazovanje gibanja kroglice v nadaljevanju moramo najprej izpeljati enačbe, ki opisujejo trk kroglice s podlago.

Lego težišča ob času t_L poznamo iz rešitev sistema diferencialnih enačb leta:

$$X_T\left(t_L\right) = X_T^L\,, \qquad Y_T\left(t_L\right) = Y_T^L\,, \qquad Z_T\left(t_L\right) = Z_T^L\,. \tag{4.19}$$

V času trka je kroglica v stiku s ploskvijo, zato za analizo gibanja med trkom potrebujemo naklonske koeficiente tangentne ravnine v točki dotikališča ter kota Ψ in Θ, ki ju normala na ploskev kotaljenja v točki dotikališča oklepa z lokalno osjo x oziroma z globalno osjo Z. Določimo jih s pomočjo enačb (3.22):

$$
\begin{aligned}
&k_1^L = \left.\frac{\partial Z}{\partial X}\right|_{X_B,Y_B}, \qquad k_2^L = \left.\frac{\partial Z}{\partial Y}\right|_{X_B,Y_B}, \\
&\tan\Psi^L = \frac{k_2^L}{k_1^L}, \qquad \tan\Theta^L = \sqrt{\left(k_1^L\right)^2 + \left(k_2^L\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Gibanje kroglice v času trka bomo, podobno kot pri kotaljenju, opazovali v izbranem koordinatnem sistemu. Zato težiščne hitrosti $V_X(t_L)$, $V_Y(t_L)$, $V_Z(t_L)$ in kotne hitrosti: $\Omega_X(t_L)$, $\Omega_Y(t_L)$, $\Omega_Z(t_L)$ ob koncu leta zapišemo v izbranem koordinatnem sistemu (enačba (2.03)):

$$
\begin{aligned}
&v_x(t_L) = -V_X(t_L)\cos\Psi^L\cos\Theta^L - V_Y(t_L)\sin\Psi^L\cos\Theta^L + V_Z(t_L)\sin\Theta^L = v_x^L, \\
&v_y(t_L) = V_X(t_L)\sin\Psi^L - V_Y(t_L)\cos\Psi^L = v_y^L, \\
&v_z(t_L) = V_X(t_L)\cos\Psi^L\sin\Theta^L + V_Y(t_L)\sin\Psi^L\sin\Theta^L + V_Z(t_L)\cos\Theta^L = v_z^L, \\
&\Omega_x(t_L) = -\Omega_X(t_L)\cos\Psi^L\cos\Theta^L - \Omega_Y(t_L)\sin\Psi^L\cos\Theta^L + \Omega_Z(t_L)\sin\Theta^L = \Omega_x^L, \\
&\Omega_y(t_L) = \Omega_X(t_L)\sin\Psi^L - \Omega_Y(t_L)\cos\Psi^L = \Omega_y^L, \\
&\Omega_z(t_L) = \Omega_X(t_L)\cos\Psi^L\sin\Theta^L + \Omega_Y(t_L)\sin\Psi^L\sin\Theta^L + \Omega_Z(t_L)\cos\Theta^L = \Omega_z^L.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

V nabor vrednosti, ki jih moramo poznati, če želimo začeti z analizo gibanja med trkom, spadajo še zasuki telesnih osi:

$$
\psi(t_L) = \psi^L, \qquad \vartheta(t_L) = \vartheta^L, \qquad \varphi(t_L) = \varphi^L. \tag{4.22}
$$

4.3 Trk kroglice s podlago

Dogodku, ko se kroglica pri času t_L z delcem, najbližjim podlagi, dotakne podlage, pravimo trk. Lega, težiščne in kotne hitrosti ter zasuki kroglice so nam v tem trenutku povsem znani – izrazi (4.19)–(4.22).

4.3.1 Predpostavke

Za obdobje trka privzamemo tri standardne predpostavke inženirske teorije trka:

(i) *Trajanje trka je tako kratko, da smemo vzeti, da se lega kroglice med trkom ne spremeni*. Med trkom se torej ne spremeni lega težišča kroglice:

$$X_T(t) = X_T^L = konst., \qquad Y_T(t) = Y_T^L = konst., \qquad Z_T(t) = Z_T^L = konst., \tag{4.23}$$

ohranita se zasuka Ψ in Θ:

$$\Psi(t) = \Psi^L = konst., \qquad \Theta(t) = \Theta^L = konst., \tag{4.24}$$

nespremenjeni pa ostanejo tudi Eulerjevi koti:

$$\psi(t) = \psi^L = konst., \qquad \vartheta(t) = \vartheta^L = konst., \qquad \varphi(t) = \varphi^L = konst. \tag{4.25}$$

't' označuje čas med trkom. Če čas ob koncu trka označimo s t_T, potem t pripada intervalu $[t_L, t_T]$, trajanje trka $\Delta t_T = t_T - t_L$ pa je tako kratko, da ga lahko zanemarimo: $\Delta t_T = 0$. Trk je po tej predpostavki hipen dogodek, pri katerem funkcije $X_T(t)$, $Y_T(t)$, $Z_T(t)$, $\Psi(t)$, $\Theta(t)$, $\psi(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$ ostajajo zvezne, njihovi odvodi – to so ravno težiščne in kotne hitrosti $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$, $\Omega_x(t)$, $\Omega_y(t)$, $\Omega_z(t)$, pa so ob tem nezvezne funkcije.

(ii) *Med trkom so trčne sile tako velike, da lahko vse ostale sile v primerjavi z njimi zanemarimo*.

(iii) *Kroglica in podlaga se med trkom ne deformirata. Stiskanje (kompresijo) in razmikanje (restitucijo) teles ob trku prevzame fiktiven deformabilen delec na stiku obeh teles*.

4.3.2 Odvod po času med trkom

Preden se lotimo izpeljav, moramo podrobneje opredeliti, kaj pomeni odvod po času med trkom. Ena od posledic predpostavke (i) je tudi, da med trkom bazni vektorji vseh treh koordinatnih sistemov ostajajo nespremenjeni. Odvodi baznih vektorjev po času so med trkom zato enaki nič. Posebej zapišimo samo odvode baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema, v katerem zapisujemo količine med trkom:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_x = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_y = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_z = 0. \tag{4.26}$$

Odvod po času poljubnega vektorja $\boldsymbol{v}$, zapisanega v izbranem koordinatnem sistemu, je zaradi (4.26) kar enak relativnemu odvodu $\boldsymbol{v}$ po času:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{abs}} = \dot{v}_x \boldsymbol{e}_x + \dot{v}_y \boldsymbol{e}_y + \dot{v}_z \boldsymbol{e}_z = \dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{rel}}. \tag{4.27}$$

Z namenom, da bi poudarili to lastnost, vpeljemo za odvod po času med trkom oznako 'D':

$$\frac{\mathrm{D}(\cdot)}{\mathrm{D}t} = \left.\frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}t}\right|_{\substack{\mathrm{med}\\ \mathrm{trkom}}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{rel}}. \tag{4.28}$$

4.3.3 Impulz normalne komponente trčne sile kot parameter časa

Gibalne enačbe zopet izpeljemo s pomočjo izrekov o gibalni in vrtilni količini. Zaradi predpostavke (ii) v obeh nastopajo samo trčne sile. Te se med trkom spreminjajo. Ker pa je trajanje trka zanemarljivo majhno, tega spreminjanja ne moremo časovno opisati. Zato pri študiju trka ne računamo s trčnimi silami, ampak z njihovimi impulzi.

Impulz poljubne sile $\boldsymbol{F}$ je definiran kot

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t. \tag{4.29}$$

Če upoštevamo oznako (4.28) za odvod po času med trkom, je impulz sile $\boldsymbol{F}$ definiran z izrazom

$$\mathrm{D}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{D}t. \tag{4.30}$$

Trčno silo $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ lahko tako kot reakcijsko silo podlage (3.01) razdelimo na normalno in tangentno komponento:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R} = R_x \boldsymbol{e}_x + R_y \boldsymbol{e}_y + R_z \boldsymbol{e}_z \quad \text{oziroma} \\ &\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} = T\boldsymbol{e}_T + N\boldsymbol{e}_N = T\boldsymbol{e}_T + R_z \boldsymbol{e}_z. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Njeni impulzi so:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p} = p_x \boldsymbol{e}_x + p_y \boldsymbol{e}_y + p_z \boldsymbol{e}_z \quad \text{oziroma} \\ &\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_T + \boldsymbol{p}_N = p_T \boldsymbol{e}_T + p_N \boldsymbol{e}_N = p_T \boldsymbol{e}_T + p_z \boldsymbol{e}_z. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Za komponente trčne – podporne sile potem velja:

$$R_x = \frac{\mathrm{D}p_x}{\mathrm{D}t}, \qquad R_y = \frac{\mathrm{D}p_y}{\mathrm{D}t}, \qquad R_z = \frac{\mathrm{D}p_z}{\mathrm{D}t} \qquad \text{oziroma}$$
$$T = \frac{\mathrm{D}p_T}{\mathrm{D}t}, \qquad N = R_z = \frac{\mathrm{D}p_N}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}p_z}{\mathrm{D}t}. \tag{4.33}$$

Posebej poglejmo impulz normalne sile. Normalna komponenta trčne sile deluje med trkom ves čas v pozitivni smeri osi z in je zato pozitivna ali pa kvečjemu enaka nič:

$$\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{e}_z = R_z\boldsymbol{e}_z, \qquad N = R_z \geq 0. \tag{4.34}$$

V vsakem trenutku trka je pozitiven tudi njen impulz:

$$p_N = \int_{t_\mathrm{L}}^{t} N(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \geq \quad 0, \qquad t \in (t_\mathrm{L}, t_\mathrm{T}]. \tag{4.35}$$

Ob začetku trka ($t = t_\mathrm{L}$) je $p_N = 0$, ob koncu trka ($t = t_\mathrm{T}$) pa je $p_N = p_{NT}$. Enačba (4.35) pove, da je $p_N(t)$ monotono naraščajoča funkcija časa t. S tem je zagotovljen obstoj obrata funkcije:

$$p_N = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = g^{-1}(p_N). \tag{4.36}$$

Vsako funkcijo časa, $h(t)$, lahko preko gornje enačbe zapišemo kot funkcijo parametra p_N:

$$h(t) = h\left(g^{-1}(p_N)\right) = f(p_N). \tag{4.37}$$

To pomeni, da sta p_N in t enakovredna parametra, kar omogoča, da za opis časovnih dogajanj izberemo impulz p_N. Da bo analogija s časom čim bolj očitna tudi v zapisanem, ga odslej označujemo samo s p: $p = p_N$. Odločimo se, da v gibalnih enačbah nadomestimo čas z impulzom normalne sile p.

4.3.4 Gibalne enačbe med trkom

Izreka o gibalni in vrtilni količini zapišemo z novimi oznakami (4.28) in v skladu s predpostavko (ii) od vseh sil, ki delujejo na kroglico, upoštevamo le podporno silo $\boldsymbol{R}$. Izreka s temi oznakami dobita obliko

$$\frac{\mathrm{D}\left(m\,\boldsymbol{v}_T\right)}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{R},\qquad \frac{\mathrm{D}\left(\boldsymbol{L}_T\right)}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{M}^T=\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{R}. \tag{4.38}$$

Enačbi pomnožimo z Dt in upoštevamo definicijo impulza sile (4.30). Enačbi dobita diferencialno obliko

$$\mathrm{D}\left(m\,\boldsymbol{v}_T\right)=\boldsymbol{R}\,\mathrm{D}t=\mathrm{D}\boldsymbol{p},\qquad \mathrm{D}\left(\boldsymbol{L}_T\right)=\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{R}\,\mathrm{D}t=\boldsymbol{r}_B\times\mathrm{D}\boldsymbol{p}. \tag{4.39}$$

Pri računu relativnih diferencialov težiščne hitrosti in vrtilne količine zopet upoštevamo dejstvo, da se lega izbranega koordinatnega sistem med trkom ne spremeni, zato sta relativna diferenciala kar enaka absolutnim:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\boldsymbol{v}_T&=\mathrm{D}\left(v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y+v_z\boldsymbol{e}_z\right)=\mathrm{D}v_x\,\boldsymbol{e}_x+\mathrm{D}v_y\,\boldsymbol{e}_y+\mathrm{D}v_z\,\boldsymbol{e}_z,\\ \mathrm{D}\boldsymbol{L}_T&=\mathrm{D}\left(A\,\Omega_x\boldsymbol{e}_x+A\,\Omega_y\boldsymbol{e}_y+A\,\Omega_z\boldsymbol{e}_z\right)=A\left(\mathrm{D}\Omega_x\right)\boldsymbol{e}_x+A\left(\mathrm{D}\Omega_y\right)\boldsymbol{e}_y+A\left(\mathrm{D}\Omega_z\right)\boldsymbol{e}_z.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Izreka zapišimo še v skalarni obliki, kjer upoštevamo (4.33) in (4.40):

- Izrek o gibalni količini:

$$\begin{aligned}m\,\mathrm{D}v_x&=R_x\,\mathrm{D}t=\mathrm{D}p_x,\\ m\,\mathrm{D}v_y&=R_y\,\mathrm{D}t=\mathrm{D}p_y,\\ m\,\mathrm{D}v_z&=R_z\,\mathrm{D}t=\mathrm{D}p_z.\end{aligned} \tag{4.41}$$

- Izrek o vrtilni količini:

$$\begin{aligned}A\left(\mathrm{D}\Omega_x\right)&=a\,R_y\,\mathrm{D}t=a\,\mathrm{D}p_y,\\ A\left(\mathrm{D}\Omega_y\right)&=-a\,R_x\,\mathrm{D}t=-a\,\mathrm{D}p_x,\\ A\left(\mathrm{D}\Omega_z\right)&=0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

4.3.5 Enačbe trka s podrsavanjem

Ko se kroglica dotakne podlage, ima delec v dotikališču komponento hitrosti v smeri normale na ploskev zagotovo različno od nič:

$$v_{Bz}^{L} \neq 0. \tag{4.43}$$

Običajno je tedaj tudi komponenta hitrosti dotikališča v tangentni ravnini različna od nič:

$$v_{B}^{L} = \sqrt{\left(v_{Bx}^{L}\right)^{2} + \left(v_{By}^{L}\right)^{2}} \neq 0, \tag{4.44}$$

zato navadno kroglica v začetku trka zdrsne. Med fazo stiskanja (kompresije) se lahko zgodi, da hitrost v dotikališču doseže vrednost nič (lahko pa tudi že ob začetku trka), zaradi česar se kroglica lahko začne kotaliti[1] brez podrsavanja. Zato najprej izpeljemo enačbe trka s podrsavanjem in šele nato brez podrsavanja.

Med podrsavanjem sta normalna in tangencialna trčna sila v dotikališču povezani s Coulombovim zakonom trenja

$$T = \mu_T N. \tag{4.45}$$

Z μ_T smo označili koeficient trenja med trkom, ki je po omembah v literaturi praktično enak kot pri običajnem kotaljenju. Kadar bo kroglica drsela, bomo zanj vzeli dinamični koeficient trenja (μ_{Td}), sicer pa statičnega (μ_{Ts}). Pri zapisu enačb razlikovanje med obema koeficienta opustimo in za oba uporabljamo oznako μ_T.

Namesto sil imamo zdaj v enačbah gibanja impulze. Impulza normalne in tangentne trčne sile izrazimo iz enačb (4.33):

$$\mathrm{D}p_T = T\,\mathrm{D}t, \qquad \mathrm{D}p_N = N\,\mathrm{D}t = \mathrm{D}p. \tag{4.46}$$

Enačbi delimo med seboj in dobimo

$$\frac{\mathrm{D}p_T}{\mathrm{D}p} = \frac{T}{N} = \mu_T. \tag{4.47}$$

[1] Ker je trajanje trka zanemarljivo majhno, je o kotaljenju med trkom težko govoriti, izraz je uporabljen zgolj ilustrativno.

Ker je koeficient μ_T konstanten, enačbo (4.47) lahko integriramo. Dobimo Coulombov zakon trenja, zapisan z impulzi:

$$p_T = \mu_T \, p. \tag{4.48}$$

Impulz p_T, tako kot sila trenja T, leži v tangentni ravnini na ploskev v točki dotikališča in je med trkom usmerjen pod kotom α glede na os x oziroma bazni vektor $\boldsymbol{e}_x$. Podobno kot pri kotaljenju s podrsavanjem, označimo kot, ki ga tangencialna komponenta začetne dotikališčne hitrosti v_B oklepa z osjo x, z β. Zopet velja enačba (3.39):

$$\beta = \pi + \alpha. \tag{4.49}$$

Tako kot pri kotaljenju s podrsavanjem, tudi v gibalnih enačbah trka s podrsavanjem težiščni hitrosti v_x, v_y ter komponenti trčne sile R_x in R_y nadomestimo z velikostjo dotikališčne hitrosti v_B, s kotom α in s silo trenja T. Postopek poznamo iz enačb (3.37), (3.38), (3.40), (3.43) in (3.44), zato lahko na kratko zapišemo:

$$\begin{aligned} &R_x = T\cos\alpha, \qquad R_y = T\sin\alpha, \\ &v_x = -v_B\cos\alpha + a\,\Omega_y, \qquad v_y = -v_B\sin\alpha - a\,\Omega_x. \end{aligned} \tag{4.50}$$

V izreku o gibalni količini potrebujemo relativna diferenciala težiščnih hitrosti $\mathrm{D}v_x$ in $\mathrm{D}v_y$. Drugi dve od enačb (4.50) diferenciramo v relativnem smislu:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}v_x &= -\cos\alpha\,\mathrm{D}v_B + v_B\sin\alpha\,\mathrm{D}\alpha + a\,\mathrm{D}\Omega_y, \\ \mathrm{D}v_y &= -\sin\alpha\,\mathrm{D}v_B - v_B\cos\alpha\,\mathrm{D}\alpha - a\,\mathrm{D}\Omega_x. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Z upoštevanjem (4.50) izrek o gibalni količini med trkom (4.41) zapišemo kot

$$\begin{aligned} m\,\mathrm{D}v_x &= T\cos\alpha\,\mathrm{D}t, \\ m\,\mathrm{D}v_y &= T\sin\alpha\,\mathrm{D}t, \\ m\,\mathrm{D}v_z &= N\,\mathrm{D}t. \end{aligned} \tag{4.52}$$

$\mathrm{D}v_x$ in $\mathrm{D}v_y$ izrazimo s (4.51) ter upoštevamo Coulombov zakon (4.45):

$$\begin{aligned} &m\left(-\cos\alpha\,\mathrm{D}v_B + v_B\sin\alpha\,\mathrm{D}\alpha + a\,\mathrm{D}\Omega_y\right) = \mu_T N\cos\alpha\,\mathrm{D}t, \\ &m\left(-\sin\alpha\,\mathrm{D}v_B - v_B\cos\alpha\,\mathrm{D}\alpha - a\,\mathrm{D}\Omega_x\right) = \mu_T N\sin\alpha\,\mathrm{D}t, \\ &m\,\mathrm{D}v_z = N\,\mathrm{D}t. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Nazadnje upoštevamo še definicijo impulza normalne sile (4.46) in dobimo končno obliko izreka o gibalni količini pri trku s podrsavanjem:

$$\begin{aligned}
&-\cos\alpha\,\mathrm{D}v_B + v_B\sin\alpha\,\mathrm{D}\alpha + a\,\mathrm{D}\Omega_y = \frac{\mu_T}{m}\cos\alpha\,\mathrm{D}p,\\
&-\sin\alpha\,\mathrm{D}v_B - v_B\cos\alpha\,\mathrm{D}\alpha - a\,\mathrm{D}\Omega_x = \frac{\mu_T}{m}\sin\alpha\,\mathrm{D}p,\\
&\mathrm{D}v_z = \frac{1}{m}\mathrm{D}p.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

V enačbah (4.42) upoštevamo izraze (4.50):

$$\begin{aligned}
&A\left(\mathrm{D}\Omega_x\right) = a\,T\sin\alpha\,\mathrm{D}t,\\
&A\left(\mathrm{D}\Omega_y\right) = -a\,T\cos\alpha\,\mathrm{D}t,\\
&A\left(\mathrm{D}\Omega_z\right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

nato pa še Coulombov zakon (4.45) ter definicijo impulza normalne sile (4.46). S tem enačbe izreka o vrtilni količini pri trku dobijo dokončno obliko:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\Omega_x = \frac{\mu_T a}{A}\sin\alpha\,\mathrm{D}p,\\
&\mathrm{D}\Omega_y = -\frac{\mu_T a}{A}\cos\alpha\,\mathrm{D}p,\\
&\mathrm{D}\Omega_z = 0.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Sistem enačb trka s podrsavanjem

Tri enačbe izreka o gibalni količini (4.54) ter tri enačbe izreka o vrtilni količini (4.56) sestavijo sistem šestih enačb za šest neznanih količin, ki jih med trkom s podrsavanjem ne poznamo:

$$v_B, \alpha, v_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z. \tag{4.57}$$

Pripadajoči začetni pogoji so vrednosti količin ob koncu leta (4.21):

$$t_L = t_0: \quad v_x^L = v_x^0, \quad v_y^L = v_y^0, \quad v_z^L = v_z^0, \quad \Omega_x^L = \Omega_x^0, \quad \Omega_y^L = \Omega_y^0, \quad \Omega_z^L = \Omega_z^0. \tag{4.58}$$

Začetni vrednosti za v_B in α moramo še določiti. Komponenti dotikališčne hitrosti v_{Bx} in v_{By} izračunamo z enačbami (2.61):

$$v_{Bx}^0 = v_x^0 - a\,\Omega_y^0,$$
$$v_{By}^0 = v_y^0 + a\,\Omega_x^0. \tag{4.59}$$

Začetna hitrost v dotikališču je potem taka:

$$v_B^0 = \sqrt{\left(v_{Bx}^0\right)^2 + \left(v_{By}^0\right)^2}. \tag{4.60}$$

Začetni kot α^0, ki ga sila trenja oklepa z osjo x, določimo s pomočjo enačb (3.40):

$$\cos\alpha^0 = -\frac{v_{Bx}^0}{v_B^0}, \qquad \sin\alpha^0 = -\frac{v_{By}^0}{v_B^0}. \tag{4.61}$$

Enačbe trka s podrsavanjem in pripadajoče začetne pogoje še enkrat pregledno zapišimo v oknu 6. Izraze v (4.54) in (4.56) delimo z Dp, tako da so diferencialne enačbe zapisane v obliki, ki smo jo navajeni, le da imamo namesto odvodov po času tu odvode po p.

Okno 6: Sistem enačb trka s podrsavanjem in pripadajoči začetni pogoji.

Osnovne neznanke: $v_B, \alpha, v_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$

$$[T_{S1}] \quad -\cos\alpha\frac{\mathrm{D}v_B}{\mathrm{D}p} + v_B\sin\alpha\frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}p} + a\frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p} = \frac{\mu_T}{m}\cos\alpha$$

$$[T_{S2}] \quad -\sin\alpha\frac{\mathrm{D}v_B}{\mathrm{D}p} - v_B\cos\alpha\frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}p} - a\frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p} = \frac{\mu_T}{m}\sin\alpha$$

$$[T_{S3}] \quad \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}p} = \frac{1}{m}$$

$$[T_{S4}] \quad \frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p} = \frac{\mu_T a}{A}\sin\alpha$$

$$[T_{S5}] \quad \frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p} = -\frac{\mu_T a}{A}\cos\alpha$$

$$[T_{S6}] \quad \frac{\mathrm{D}\Omega_z}{\mathrm{D}p} = 0$$

Začetni pogoji: $t = t_L, \quad p = p_0 = 0$:

$$v_B\left(p_0\right) = v_B^0, \quad \alpha\left(p_0\right) = \alpha^0, \quad v_z\left(p_0\right) = v_z^0$$

$$\Omega_x\left(p_0\right) = \Omega_x^0, \quad \Omega_y\left(p_0\right) = \Omega_y^0, \quad \Omega_z\left(p_0\right) = \Omega_z^0$$

Analitično reševanje sistema enačb trka s podrsavanjem

Sistem enačb [T_{S1}]–[T_{S6}] je preprosto analitično rešljiv. Enačbi [T_{S4}] in [T_{S5}] upoštevamo v enačbah [T_{S1}], [T_{S2}] in dobimo:

$$\begin{aligned} &-\cos\alpha \frac{\mathrm{D}v_B}{\mathrm{D}p} + v_B \sin\alpha \frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}p} = \frac{\mu_T}{m}\cos\alpha + \frac{\mu_T a^2}{A}\cos\alpha, \\ &-\sin\alpha \frac{\mathrm{D}v_B}{\mathrm{D}p} - v_B \cos\alpha \frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}p} = \frac{\mu_T}{m}\sin\alpha + \frac{\mu_T a^2}{A}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Najprej prvo enačbo pomnožimo z $-\cos\alpha$, drugo z $-\sin\alpha$ in ju seštejemo, nato pa prvo enačbo pomnožimo s $\sin\alpha$, drugo pa z $-\cos\alpha$ in ju zopet seštejemo. Enačbi se lepo poenostavita:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{D}v_B}{\mathrm{D}p} = -\mu_T\left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{A}\right), \\ &v_B \frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}p} = 0. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Rešitev enačb (4.63) dobimo preprosto z integracijo:

$$\begin{aligned} &v_B(p) = v_B^0 - p\,\mu_T\left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{A}\right), \\ &\alpha(p) = \alpha^0 = konst. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Rešitev enačbe [T_{S3}] prav tako dobimo kar z analitično integracijo:

$$v_z(p) = v_z^0 + \frac{p}{m}. \tag{4.65}$$

Tudi enačbe [T_{S4}]–[T_{S6}] rešimo z analitično integracijo:

$$\begin{aligned} &\Omega_x(p) = \Omega_x^0 + p\sin\alpha^0 \frac{\mu_T a}{A}, \\ &\Omega_y(p) = \Omega_y^0 - p\cos\alpha^0 \frac{\mu_T a}{A}, \\ &\Omega_z(p) = \Omega_z^0 = konst. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Odvisne količine sistema računamo z enačbami:

$$
\begin{aligned}
p_T &= \mu_T p, \\
p_x &= p_T \cos\alpha, \\
p_y &= p_T \sin\alpha, \\
v_x &= -v_B \cos\alpha + a\,\Omega_y, \\
v_y &= -v_B \sin\alpha - a\,\Omega_x.
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Z rešitvami (4.64), (4.65), (4.66) in (4.67) imamo gibanje kroglice pri trku s podrsavanjem natančno določeno.

4.3.6 Enačbe trka brez podrsavanja

Med trkom se lahko zgodi, da tangentna hitrost v dotikališču postane enaka nič; vrednost impulza normalne sile ob tem dogodku označimo s $p = p^*$. Kroglica se tedaj lahko začne gibati brez podrsavanja. Potem velja:

$$
\begin{aligned}
v_{Bx} &= v_x - a\,\Omega_y = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = a\,\Omega_y, \\
v_{By} &= v_y + a\,\Omega_x = 0 \quad \rightarrow \quad v_y = -a\,\Omega_x.
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Hitrost dotikališčnega delca v smeri normale pa je med trkom različna od nič:

$$
v_{Bz} = v_z \neq 0. \tag{4.69}
$$

Kadar ni podrsavanja, so podporne sile neodvisne med seboj. V gibalnih enačbah jih nadomestimo z njihovimi impulzi, tako kot to povejo izrazi (4.33).

Izrek o gibalni količini ohrani obliko iz enačb (4.41):

$$
\begin{aligned}
m\,\mathrm{D}v_x &= \mathrm{D}p_x, \\
m\,\mathrm{D}v_y &= \mathrm{D}p_y, \\
m\,\mathrm{D}v_z &= \mathrm{D}p.
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

Tudi izrek o vrtilni količini se ohranja tak, kot je zapisan v (4.42):

$$
\begin{aligned}
A\left(\mathrm{D}\Omega_x\right) &= a\,\mathrm{D}p_y, \\
A\left(\mathrm{D}\Omega_y\right) &= -a\,\mathrm{D}p_x, \\
A\left(\mathrm{D}\Omega_z\right) &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Sistem enačb trka brez podrsavanja

Tokrat je vseh neznank sistema osem. To so: komponente težiščne hitrosti v_x, v_y, v_z, komponente vektorja vrtilne količine Ω_x, Ω_y, Ω_z ter impulza trčne sile p_x in p_y. Na voljo imamo osem enačb: tri iz izreka o gibalni količini, tri iz izreka o vrtilni količini ter dva kinematična pogoja (4.68), ki ju zapišemo še v diferencialni obliki (odvajamo ju po p):

$$\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}p} = a\frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p}, \qquad \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}p} = -a\frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p}. \tag{4.72}$$

Pripadajoči začetni pogoji so vrednosti neznank ob koncu podrsavanja – pri $p = p^*$; določimo jih iz rešitev trka s podrsavanjem in z upoštevanjem kinematičnega pogoja (4.68):

$$\begin{aligned}
&v_x\left(p^*\right) = a\,\Omega_y\left(p^*\right), \qquad v_y\left(p^*\right) = -a\,\Omega_x\left(p^*\right), \qquad v_z\left(p^*\right),\\
&\Omega_x\left(p^*\right), \qquad \Omega_y\left(p^*\right), \qquad \Omega_z\left(p^*\right),\\
&p_x\left(p^*\right) = \mu_T\, p^* \cos\left(\alpha\left(p^*\right)\right), \qquad p_y\left(p^*\right) = \mu_T\, p^* \sin\left(\alpha\left(p^*\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Enačbe trka brez podrsavanja in pripadajoče začetne pogoje še enkrat pregledno zapišimo v oknu 7. Enačbe (4.70) in (4.71) zopet delimo z Dp, tako da so diferencialne enačbe zapisane v obliki, ki smo jo navajeni, le da imamo namesto odvodov po času odvode po p.

Okno 7: Sistem enačb trka brez podrsavanja s pripadajočimi začetnimi pogoji.

Osnovne neznanke: $v_x, v_y, v_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, p_x, p_y$

$$[T_{B1}] \quad \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}p} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{D}p_x}{\mathrm{D}p}$$

$$[T_{B2}] \quad \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}p} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{D}p_y}{\mathrm{D}p}$$

$$[T_{B3}] \quad \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}p} = \frac{1}{m}$$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[T_{B4}] \quad \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}p} = a\frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p}$$

$$[T_{B5}] \quad \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}p} = -a\frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p}$$

$$[T_{B6}] \quad A\frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p} = a\frac{\mathrm{D}p_y}{\mathrm{D}p}$$

$$[T_{B7}] \quad A\frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p} = -a\frac{\mathrm{D}p_x}{\mathrm{D}p}$$

$$[T_{B8}] \quad \frac{\mathrm{D}\Omega_z}{\mathrm{D}p} = 0$$

Začetni pogoji pri $p = p^*$:

$$v_x\left(p^*\right) = a\,\Omega_y\left(p^*\right), \qquad v_y\left(p^*\right) = -a\,\Omega_x\left(p^*\right), \qquad v_z\left(p^*\right),$$

$$\Omega_x\left(p^*\right), \qquad \Omega_y\left(p^*\right), \qquad \Omega_z\left(p^*\right),$$

$$p_x\left(p^*\right) = \mu_T p^* \cos\alpha\left(p^*\right), \qquad p_y\left(p^*\right) = \mu_T p^* \sin\alpha\left(p^*\right)$$

Analitično reševanje sistema enačb trka brez podrsavanja

Sistem enačb [T_{B1}]–[T_{B8}] je preprosto analitično rešljiv. Iz enačb [T_{B1}] in [T_{B2}] izrazimo $\mathrm{D}p_x$ in $\mathrm{D}p_y$:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}p_x &= m\,\mathrm{D}v_x, \\ \mathrm{D}p_y &= m\,\mathrm{D}v_y. \end{aligned} \tag{4.74}$$

V gornji enačbi vstavimo izraza za $\mathrm{D}v_x$ in $\mathrm{D}v_y$ iz enačb [T_{B4}] in [T_{B5}]:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}p_x &= ma\,\mathrm{D}\Omega_y, \\ \mathrm{D}p_y &= -ma\,\mathrm{D}\Omega_x. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Dobljene izraze upoštevamo v enačbah [T_{B6}] in [T_{B7}]:

$$A\frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p}=-ma^2\frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p},\qquad A\frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p}=-ma^2\frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p}. \tag{4.76}$$

Enačbi uredimo

$$\left(A+ma^2\right)\frac{\mathrm{D}\Omega_x}{\mathrm{D}p}=0,\qquad \left(A+ma^2\right)\frac{\mathrm{D}\Omega_y}{\mathrm{D}p}=0. \tag{4.77}$$

Rešitvi sta:

$$\Omega_x(p)=\Omega_x\left(p^*\right)=konst.,\qquad \Omega_y(p)=\Omega_y\left(p^*\right)=konst. \tag{4.78}$$

Iz enačbe [T_{B8}] z integracijo dobimo še kotno hitrost Ω_z:

$$\Omega_z(p)=\Omega_z\left(p^*\right)=konst. \tag{4.79}$$

Rešitve (4.78) sedaj vstavimo v [T_{B4}] in [T_{B5}] in izračunamo komponenti v_x in v_y težiščne hitrosti:

$$v_x(p)=v_x\left(p^*\right)=konst.,\qquad v_y(p)=v_y\left(p^*\right)=konst. \tag{4.80}$$

Komponento v_z dobimo iz enačbe [T_{B3}]:

$$v_z(p)=v_z\left(p^*\right)+\frac{p-p^*}{m}. \tag{4.81}$$

Če v gornji enačbi upoštevamo rešitev za $v_z(p^*)$, ki jo dobimo iz enačbe (4.65) za trk s podrsavanjem, je rešitev za v_z

$$v_z(p)=v_z\left(p^*\right)+\frac{p-p^*}{m}=v_z^0+\frac{p^*}{m}+\frac{p-p^*}{m}=v_z^0+\frac{p}{m}. \tag{4.82}$$

Primerjava rešitev (4.65) in (4.82) pove, da težiščno hitrost v smeri z med trkom računamo enako v primeru trka s podrsavanjem in trka brez podrsavanja. Ko poznamo težiščne hitrosti, lahko iz enačb [T_{B1}] in [T_{B2}] določimo še impulza p_x in p_y:

$$p_x(p) = p_x(p^*) = konst.,$$
$$p_y(p) = p_y(p^*) = konst. \tag{4.83}$$

Z rešitvami (4.78), (4.79), (4.80), (4.82) in (4.83) je gibanje kroglice med trkom brez podrsavanja natanko določeno.

4.3.7 Analiza gibanja med trkom

Trk s ali brez podrsavanja

V začetku trka kroglica podrsava. Ob začetku kotaljenja brez podrsavanja mora biti izpolnjen osnovni pogoj $v_B = 0$. To se zgodi pri vrednosti impulza normalne sile $p = p^*$, ki ga določimo iz znanih rešitev za trk s podrsavanjem. V enačbah spet ločimo med statičnim in dinamičnim koeficientom trenja. Iz (4.64) dobimo:

$$v_B(p^*) = v_B^0 - p^* \mu_{Td}\left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{A}\right) = 0. \tag{4.84}$$

Iz te enačbe sledi p^*

$$p^* = \frac{v_B^0}{\mu_{Td}}\left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{A}\right)^{-1} = \frac{2}{7}\frac{m v_B^0}{\mu_{Td}}. \tag{4.85}$$

Pri $p = p^*$ bo tangentna hitrost dotikališča postala enaka nič: $v_B = 0$. S tem je izpolnjen osnovni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja; o tem ali bo pri $p = p^*$ do kotljenja brez podrsavanja res prišlo, pa odloča dodatni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja:

$$\frac{T(p^*)}{N(p^*)} < \mu_{Ts} \qquad \text{oziroma} \qquad \frac{p_T(p^*)}{p_N(p^*)} < \mu_{Ts}. \tag{4.86}$$

p_N in p_T moramo izračunati z enačbami, ki veljajo za trk brez podrsavanja:

$$p_T(p^*) = \sqrt{p_x^2(p^*) + p_y^2(p^*)}, \qquad p_N(p^*) = p^*. \tag{4.87}$$

p_x in p_y sta pri kotaljenju brez podrsavanja kar enaka vrednostim ob koncu podrsavanja – rešitev (4.83):

$$p_x\left(p^*\right) = p_T\left(p^*\right)\cos\alpha\left(p^*\right),$$
$$p_y\left(p^*\right) = p_T\left(p^*\right)\sin\alpha\left(p^*\right). \tag{4.88}$$

V gornjih enačbah upoštevamo enačbo (4.66) ter prvo od rešitev (4.67):

$$p_x\left(p^*\right) = \mu_{Td}\, p^* \cos\alpha^0,$$
$$p_y\left(p^*\right) = \mu_{Td}\, p^* \sin\alpha^0. \tag{4.89}$$

Impulz tangentne sile je potem

$$p_T\left(p^*\right) = \sqrt{\left(\mu_{Td}\, p^* \cos\alpha^0\right)^2 + \left(\mu_{Td}\, p^* \sin\alpha^0\right)^2} = \mu_{Td}\, p^*. \tag{4.90}$$

Dodatni pogoj za trk brez podrsavanja je

$$\frac{p_T\left(p^*\right)}{p_N\left(p^*\right)} = \frac{\mu_{Td}\, p^*}{p^*} = \mu_{Td} \quad \leq \quad \mu_{Ts}. \tag{4.91}$$

Pogoj (4.91) je vedno izpolnjen. Iz literature namreč vemo, da je dinamični koeficient trenja vedno manjši ali pa kvečjemu enak statičnemu: $\mu_d \leq \mu_s$.

Dokazali smo, da kroglica med trkom neha podrsavati natanko takrat, ko tangentna komponenta hitrosti v dotikališču doseže vrednost nič: $v_B = 0$. To se zgodi ob vrednosti impulza normale sile $p = p^*$, ki je podan z enačbo (4.85).

Sedaj ko poznamo pogoje za začetek kotaljenja brez podrsavanja, se lahko vprašamo, ali med trkom lahko pride do izmeničnega gibanja s podrsavanjem – brez podrsavanja – s podrsavanjem... Do ponovnega zdrsa lahko pride, če med trkom brez podrsavanja razmerje tangentne in normalne trčne sile oziroma njunih impulzov doseže vrednost statičnega koeficienta trenja:

$$p > p^*: \qquad \frac{T}{N} = \mu_{Ts} \quad \text{oziroma} \quad \frac{p_T}{p_N} = \mu_{Ts} \quad \rightarrow \quad \text{zdrs.} \tag{4.92}$$

p_N in p_T sta med trkom brez podrsavanja določena z enačbama

$$p_T(p) = \sqrt{p_x^2(p) + p_y^2(p)}, \qquad p_N(p) = p. \tag{4.93}$$

Upoštevamo, da sta p_x in p_y pri kotaljenju brez podrsavanja kar enaka vrednostim ob koncu podrsavanja – rešitev (4.83), nato pa uporabimo še enačbo (4.89):

$$\begin{aligned} p_x(p > p^*) &= p_x(p^*) = \mu_{Td}\, p^* \cos\alpha^0, \\ p_y(p > p^*) &= p_y(p^*) = \mu_{Td}\, p^* \sin\alpha^0. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Izraze v (4.93) in (4.94) vstavimo v pogoj (4.92):

$$\frac{p_T}{p_N} = \frac{\sqrt{\left(\mu_{Td}\, p^* \cos\alpha^0\right)^2 + \left(\mu_{Td}\, p^* \sin\alpha^0\right)^2}}{p} = \frac{\mu_{Td}\, p^*}{p}. \tag{4.95}$$

Ker je med trkom brez podrsavanja $p > p^*$, velja:

$$\frac{\mu_{Td}\, p^*}{p} < \mu_{Td} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p_T}{p_N} = \frac{\mu_{Td}\, p^*}{p} < \mu_{Ts}, \tag{4.96}$$

saj vemo, da je dinamični koeficient trenja vedno manjši ali pa kvečjemu enak statičnemu: $\mu_d \leq \mu_s$.

S tem smo dokazali, da je med trkom brez podrsavanja vedno izpolnjen pogoj

$$\frac{p_T}{p_N} < \mu_{Ts} \quad \text{oziroma} \quad \frac{T}{N} < \mu_{Ts}, \tag{4.97}$$

kar pomeni, da kroglica med trkom ne more preiti iz faze kotaljenja brez podrsavanja v kotaljenje s podrsavanjem. Edini možen prehod je tako prehod iz trka s v trk brez podrsavanja.

Kompresijska in restitucijska faza trka

Med trkom se telesi v stiku deformirata, zato se njuni težišči približujeta. Hitrost približevanja je hitrost dotikališča v smeri pravokotno na dotikališčno ploskev – v_{Bz}, saj smo ravno dotikališčni točki predpisali namišljen deformabilen delec, ki zajame deformacijo toge kroglice in ploskve. Obdobju, ko se težišči teles v trku približujeta, pravimo kompresijska faza trka. V trenutku, ko hitrost približevanja postane enaka nič, se telesi ne približujeta več in kompresijske faze je konec. Čas, ko se to zgodi, označimo s t_k, vrednost impulza normalne sile pa s p_k. Pogoj za konec kompresijske faze je torej

$$v_{Bz}\left(p_k\right)=0. \tag{4.98}$$

Dotikališčna hitrost v smeri normale je kar enaka težiščni hitrosti v smeri normale. Izraz za račun težiščne hitrosti pa je enak pri trku s podrsavanjem in brez podrsavanja – enačbi (4.65) in (4.82). Pogoj (4.98) potem zapišemo kot

$$v_{Bz}\left(p_k\right)=v_z\left(p_k\right)=v_z^0+\frac{p_k}{m}=0. \tag{4.99}$$

Vrednost impulza p_k, pri katerem se konča kompresijska faza trka, je potem

$$p_k=-m\,v_z^0. \tag{4.100}$$

S koncem kompresijske faze se konča približevanje teles. V nadaljevanju trka se telesi začneta razmikati, pri tem pa se vračata v prvotno nedeformirano obliko. Obdobju razmikanja in povrnitve prvotne oblike pravimo restitucijska faza trka. Ko kroglica in podlaga dokončno zgubita stik, se restitucijska faza konča, s tem pa je končan tudi trk. Kroglica se odlepi in poleti.

Predpostavimo, da je dolžina restitucijske faze trka, merjena z impulzom normalne sile p_r, odvisna samo od geometrijskih in materialnih parametrov teles. S trajanjem kompresijske faze je povezana prek koeficienta trka e, tako da velja

$$p_r=e\,p_k,\qquad 0\le e\le 1. \tag{4.101}$$

Koeficient trka je v tem modelu kar razmerje med povrnjeno in vloženo deformacijsko energijo med trkom. Določimo ga s preprostim preizkusom, pri katerem kroglico spustimo iz znane višine, da prosto pade na vodoravno podlago, nato pa izmerimo višino po odboju – razmerje obeh višin je ravno koeficient trka.

Ob koncu kompresijske faze imamo bodisi trk s podrsavanjem bodisi brez podrsavanja. Z isto vrsto gibanja nadaljujemo analizo v restitucijski fazi trka. O vrsti gibanja v fazi restitucije bo torej odločala primerjava vrednosti p_k in p^*. Če je $p^*<p_k$, do konca podrsavanja pride še pred

koncem kompresijske faze, kroglica se začne kotaliti brez podrsavanja in tako gibanje ohrani tudi v restitucijski fazi trka. Če pa je $p^* \geq p_k$, kroglica podrsuje v celotnem trajanju kompresijske faze, zato podrsuje tudi v restitucijski fazi.

Trajanje celotnega trka je vsota trajanj obeh faz. Vrednost impulza normalne sile ob koncu trka označimo s p_{trk}, izračunamo pa ga kot

$$p_{trk} = p_k + p_r = p_k \left(1+e\right). \tag{4.102}$$

Celoten trk se torej razteza na intervalu

$$p \in \left[0, p_{trk}\right]. \tag{4.103}$$

Stanje ob koncu trka

Koncu trka sledi odlepitev kroglice in njen polet po zraku. Vrednosti spremenljivk, ki so med trkom po predpostavki (i) konstantne ter nove vrednosti težiščnih in kotnih hitrosti pa predstavljajo začetne pogoje za let kroglice:

$$\begin{aligned}
&p = p_{trk}, \quad t = t_L = t_0 : \\
&X_T^0 = X_T^L, \qquad Y_T^0 = Y_T^L, \qquad Z_T^0 = Z_T^L, \\
&v_x^0 = v_x\left(p_{trk}\right), \qquad v_y^0 = v_y\left(p_{trk}\right), \qquad v_z^0 = v_z\left(p_{trk}\right), \\
&\psi^0 = \psi^L, \qquad \vartheta^0 = \vartheta^L, \qquad \varphi^0 = \varphi^L, \\
&\Omega_x^0 = \Omega_x\left(p_{trk}\right), \qquad \Omega_y^0 = \Omega_y\left(p_{trk}\right), \qquad \Omega_z^0 = \Omega_z\left(p_{trk}\right).
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Težiščne in kotne hitrosti moramo zapisati v globalnem koordinatnem sistemu, v katerem opazujemo vrednosti količin med letom. Za ta namen uporabimo transformacijo (2.05), v kateri upoštevamo $\Psi^0 = \Psi^L$ in $\Theta^0 = \Theta^L$:

$$\begin{aligned}
V_X^0 &= -v_x^0 \cos\Psi^0 \cos\Theta^0 + v_y^0 \sin\Psi^0 + v_z^0 \cos\Psi^0 \sin\Theta^0, \\
V_Y^0 &= -v_x^0 \sin\Psi^0 \cos\Theta^0 - v_y^0 \cos\Psi^0 + v_z^0 \sin\Psi^0 \sin\Theta^0, \\
V_Z^0 &= v_x^0 \sin\Theta^0 + v_z^0 \cos\Theta^0, \\
\Omega_X^0 &= -\Omega_x^0 \cos\Psi^0 \cos\Theta^0 + \Omega_y^0 \sin\Psi^0 + \Omega_z^0 \cos\Psi^0 \sin\Theta^0, \\
\Omega_Y^0 &= -\Omega_x^0 \sin\Psi^0 \cos\Theta^0 - \Omega_y^0 \cos\Psi^0 + \Omega_z^0 \sin\Psi^0 \sin\Theta^0, \\
\Omega_Z^0 &= \Omega_x^0 \sin\Theta^0 + \Omega_z^0 \cos\Theta^0.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

4.4 Izmenjavanje faz leta in trka

Let kroglice se konča s trkom ob podlago, po trku pa kroglica ponavadi znova poleti, nekaj časa leti in nato spet trči ob podlago. Ta proces – letenje, trk in ponovni vzlet – se odvija, dokler s trki ni porabljena vsa energija kroglice. V primeru popolnoma elastičnega trka ($e = 1$) se to nikdar ne zgodi, saj je po trku kroglici povrnjena vsa energija, pri plastičnem trku ($e = 0$) pa se to lahko zgodi že ob prvem trku.

Najbolj pa nas zanimajo vmesne različice ($0 < e < 1$), ko kroglica nekajkrat trči ob podlago in vzleti, ob zadnjem trku pa se od podlage ne odlepi in se začne po njej kotaliti. Pogoj za odlepitev kroglice od podlage poznamo že iz analize kotaljenja:

$$v_{Bz} > 0. \tag{4.106}$$

Vedno ko bo po trku (pri $p = p_{trk}$) hitrost dotikališča v smeri normale večja od nič, se bo kroglica ločila od podlage in poletela. Tisti trk, pri katerem pa je hitrost dotikališča v smeri normale ob koncu trka enaka nič, pa bo zadnji, saj se bo od tega trenutka dalje kroglica kotalila po podlagi:

$$v_{Bz}\left(p_{trk}\right) = v_z\left(p_{trk}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{kotaljenje po podlagi.} \tag{4.107}$$

Analitično rešitev za račun v_z poznamo – enačba (4.82), zato lahko pogoj (4.107) zapišemo bolj natančno:

$$v_z\left(p_{trk}\right) = v_z^0 + \frac{p_{trk}}{m}. \tag{4.108}$$

V gornji enačbi najprej upoštevamo (4.102), nato pa še (4.100):

$$v_z\left(p_{trk}\right) = v_z^0 + \frac{p_k\left(1+e\right)}{m} = v_z^0 - \frac{m v_z^0\left(1+e\right)}{m} = -e v_z^0. \tag{4.109}$$

Normalna komponenta hitrosti težišča v_z po koncu trka je torej kar premosorazmerna s svojo vrednostjo ob začetku trka. Zgornja trditev enačbe (4.109) je posledica preproste definicije koeficienta trka in predpostavk (i), (ii) in (iii). Po seriji trkov se težiščna hitrost v_z približuje vrednosti nič, v splošnem pa je zaradi (4.109) vsaj malo različna od nič. Zato ob predpostavkah, s katerimi opisujemo trk, pogoju (4.107) ob nobenem trku ni zadoščeno, kar bi pomenilo, da se izmenjavanje faz leta in trka ne konča. Iz izkušenj vemo, da temu ni tako, zato za ustavitveni pogoj, ki ga potrebujemo pri programiranju, predpostavimo, da se kroglica od podlage po trku ne odlepi, če je hitrost $v_z(p_{trk})$ ob koncu trka dovolj majhna. Pri tem nastopi vprašanje, kolikšna naj bo ta vrednost, da bo z njo pokrit čim širši spekter realnih primerov. Majhne vrednosti $v_z(p_{trk})$ pomenijo tudi kratko trajanje naslednje faze leta; ta je lahko tako kratka, da jo, podobno kot trajanje trka, zanemarimo. Kriterij za velikost $v_z(p_{trk})$ ob zadnjem trku zato ni nujno preveč strog – v programu izberemo vrednost 10^{-4}. Ustreznost te izbire kasneje potrdimo tudi na primerih.

Vrednosti težiščnih in kotnih hitrosti ob zadnjem trku predstavljajo začetne vrednosti za kotaljenje kroglice po podlagi. O vrsti kotaljenja odločajo razmere med trkom. Če se kroglica med trkom ves čas giblje s podrsavanjem, bo podrsavala tudi na začetku kotaljenja. Začetne vrednosti za kotaljenje s podrsavanjem

$$X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, \Psi^0, \Theta^0, v_B^0, \alpha^0, v_z^0, \psi^0, \vartheta^0, \varphi^0, \Omega_x^0, \Omega_y^0, \Omega_z^0 \tag{4.110}$$

so vrednosti količin

$$\begin{aligned}
&X_T\left(p_{trk}\right),\quad Y_T\left(p_{trk}\right),\quad Z_T\left(p_{trk}\right),\quad \Psi\left(p_{trk}\right),\quad \Theta\left(p_{trk}\right),\\
&v_B\left(p_{trk}\right),\quad \alpha\left(p_{trk}\right),\quad v_z\left(p_{trk}\right),\quad \psi\left(p_{trk}\right),\quad \vartheta\left(p_{trk}\right),\quad \varphi\left(p_{trk}\right),\\
&\Omega_x\left(p_{trk}\right),\quad \Omega_y\left(p_{trk}\right),\quad \Omega_z\left(p_{trk}\right)
\end{aligned} \tag{4.111}$$

ob koncu trka.

Če pa kroglica med trkom preneha podrsavati, pa ni povsem očitno, da se bo začela kotaliti brez podrsavanja. Pogoji za kotaljenje brez podrsavanja so med trkom izpolnjeni samo za prevladujoče trčne sile, ob začetku kotaljenja pa morajo biti izpolnjeni za vse sile, ki jih upoštevamo pri kotaljenju. Ugotavljanje vrste kotaljenja poteka podobno kot pri kontroli prehoda iz kotaljenja s v kotaljenje brez podrsavanja. Z enačbami (3.72), ki veljajo za kotaljenje brez podrsavanja, izračunamo velikost reakcij ob začetku kotaljenja po enačbah

$$\begin{aligned}
R_x^{\mathrm{b}} &= m\dot{v}_x - \dot{\Psi} m v_y \cos\Theta - \dot{\Theta} m v_z + mg\sin\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_x - w_x\right),\\
R_y^{\mathrm{b}} &= m\dot{v}_y + \dot{\Psi} m\left(v_x \cos\Theta - v_z \sin\Theta\right) + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_y - w_y\right),\\
R_z^{\mathrm{b}} &= m\dot{v}_z + \dot{\Psi} m v_y \sin\Theta + \dot{\Theta} m v_x + mg\cos\Theta + \mu_z 2\pi a^2 \left(v_z - w_z\right),\\
T_{\mathrm{b}} &= \sqrt{\left(R_x^{\mathrm{b}}\right)^2 + \left(R_y^{\mathrm{b}}\right)^2}, \qquad N_{\mathrm{b}} = R_z^{\mathrm{b}}.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Vrednost odvodov komponent težiščnih hitrosti ter zasukov Ψ in Θ v enačbah (3.72) dobimo z rešitvijo sistema (3.27), ki velja za kotaljenje brez podrsavanja. Za neodvajane količine pa upoštevamo vrednosti, ki jih poznamo ob koncu trka.

Če za razmerje sil T_{b} in N_{b} velja

$$\frac{T_{\mathrm{b}}}{N_{\mathrm{b}}} < \mu_s, \tag{4.113}$$

se bo kroglica v nadaljevanju gibanja kotalila brez podrsavanja. Gibanje od tu naprej vodijo enačbe v oknu 1. Vrednosti količin

$$\begin{aligned}
&X_T\left(p_{trk}\right),\ \ Y_T\left(p_{trk}\right),\ \ Z_T\left(p_{trk}\right),\ \ \Psi\left(p_{trk}\right),\ \ \Theta\left(p_{trk}\right),\ \ v_x\left(p_{trk}\right),\ \ v_y\left(p_{trk}\right),\\
&v_z\left(p_{trk}\right),\ \ \psi\left(p_{trk}\right),\ \ \vartheta\left(p_{trk}\right),\ \ \varphi\left(p_{trk}\right),\ \ \Omega_x\left(p_{trk}\right),\ \ \Omega_y\left(p_{trk}\right),\ \ \Omega_z\left(p_{trk}\right)
\end{aligned} \tag{4.114}$$

ob koncu trka so začetne vrednosti kotaljenja brez podrsavanja, ki jih podaja okno 2:

$$X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, \Psi^0, \Theta^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0, \psi^0, \vartheta^0, \varphi^0, \Omega_x^0, \Omega_y^0, \Omega_z^0. \tag{4.115}$$

Če pa za razmerje sil T_{b} in N_{b} velja

$$\frac{T_{\mathrm{b}}}{N_{\mathrm{b}}} \geq \mu_s, \tag{4.116}$$

je razmerje sil ob koncu trka tako, da se bo nadaljevalo kotaljenje s podrsavanjem – enačbe so podane v oknu 3. Vrednosti količin

$$\begin{aligned}
&X_T\left(p_{trk}\right),\ \ Y_T\left(p_{trk}\right),\ \ Z_T\left(p_{trk}\right),\ \ \Psi\left(p_{trk}\right),\ \ \Theta\left(p_{trk}\right),\ \ v_B\left(p_{trk}\right),\ \ \alpha\left(p_{trk}\right),\\
&v_z\left(p_{trk}\right),\ \ \psi\left(p_{trk}\right),\ \ \vartheta\left(p_{trk}\right),\ \ \varphi\left(p_{trk}\right),\ \ \Omega_x\left(p_{trk}\right),\ \ \Omega_y\left(p_{trk}\right),\ \ \Omega_z\left(p_{trk}\right)
\end{aligned} \tag{4.117}$$

ob koncu trka pa so začetne vrednosti kotaljenja s podrsavanjem, ki jih podaja okno 4:

$$X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, \Psi^0, \Theta^0, v_B^0, \alpha^0, v_z^0, \psi^0, \vartheta^0, \varphi^0, \Omega_x^0, \Omega_y^0, \Omega_z^0. \tag{4.118}$$

5 REŠEVANJE ENAČB S PROGRAMOM MATLAB

Gibanje kroglice smo opisali s tremi sistemi enačb. Rešitve enačb trka kroglice s podlago poznamo v analitični obliki, enačbe kotaljenja brez podrsavanja, kotaljenja s podrsavanjem in leta kroglice pa bomo reševali numerično z metodami družine Runge-Kutta, vgrajenimi v programski paket *Matlab*. Metode so prirejene za reševanje začetnih problemov za sisteme diferencialnih enačb 1. reda, kar smo že upoštevali pri izpeljavi in zapisu sistemov enačb.

V Matlabu sestavimo program, ki bo reševal enačbe gibanja in rezultate prikazal v animirani obliki. Za vsako od faz gibanja najprej sestavimo opisno datoteko, v kateri natančno definiramo enačbe gibanja:

- datoteko, v kateri so zapisane diferencialne enačbe, začetni in ustavitveni pogoji kotaljenja brez podrsavanja, poimenujemo `kotaljenje_ode_b.m`;
- datoteko, v kateri so zapisane diferencialne enačbe, začetni in ustavitveni pogoji kotaljenja s podrsavanjem, poimenujemo `kotaljenje_ode_s.m`;
- datoteko, v kateri so zapisane diferencialne enačbe, začetni in ustavitveni pogoji leta kroglice, poimenujemo `let_ode.m`;
- datoteko, v kateri so zapisane analitične rešitve za obdobje trka, poimenujemo `trk.m`.

V datoteki `gibanje_kroglice.m` nato združimo vse faze gibanja in narišemo grafe ter film gibanja kroglice.

Pri kotaljenju in podrsavanju nas posebej zanimajo razmere v dotikališču, saj so prav te pomembne pri zaznavanju prehodov med posameznimi vrstami gibanj. Za račun reakcij in koeficienta trenja pri kotaljenju brez in s podrsavanjem v posebnih datotekah zapišemo še funkciji `trenje_brez_podrsavanja.m` in `trenje_s_podrsavanjem.m`.

Relief (ploskev), po katerem se kroglica kotali ali vanj trči, podajamo v datoteki `ploskev_kotaljenja.m` kot funkcijo spremenljivk X in Y (2.15) ali s pomočjo točkovnih vrednosti, med katerimi napeljemo interpolacijske funkcije (2.1.3.1). Tu so definirani tudi odvodi funkcije po spremenljivkah X in Y.

Koordinate težišča X_T, Y_T, Z_T ter kota Ψ in Θ so na začetku kotaljenja ali ob trku odvisne od lege dotikališčne točke na ploskvi. Račun teh vrednosti ((3.21), (3.22)) zapišemo v datoteko `zacetne_vrednosti_kotaljenja.m`.

5.1 Opisna datoteka za problem gibanja kroglice

Osnovna shema naloge, ki opisuje reševanje sistema diferencialnih enačb, je podobna za vse tri vrste gibanja, zato jo zapišemo samo enkrat. Posebnosti, ki pripadajo posamezni vrsti gibanja, s poudarkom na zaznavanju dogodkov pa opišemo posebej. V enačbah nastopajo številne konstante in parametri (podatki o kroglici, trenjskih lastnostih podlage, podatki o vetru in zračnem uporu), ki jih vključimo v osnovno shemo in so enaki za vse vrste gibanja. Definicijo celotnega začetnega problema v eni datoteki omogoča uporaba parametra `flag`, ki metodi za reševanje diferencialnih enačb pomaga razumeti opisno datoteko. Glede na različne vrednosti parametra se znotraj opisne datoteke izvedejo različne funkcije iz jedra opisne datoteke. Funkcije v jedru vračajo različno število rezultatov – take funkcije lahko vključimo v skupno shemo s funkcijo `varargout`.

5.1.1 Splošna shema opisne datoteke za reševanje sistema diferencialnih enačb

```
function varargout = naloga(t,x,flag,data,c,T,z,W)

% naloga:
    % kotaljenje brez podrsavanja: kotaljenje_ode_b;
    % kotaljenje s podrsavanjem: kotaljenje_ode_s;
    % let kroglice: let_ode;

% data je stolpec podatkov o kroglici:
    % data(1)=m  je masa kroglice;
    % data(2)=a  je polmer kroglice;
```

% `data(3)` $=g$ je težnostni pospešek;

% `c` so začetni pogoji, različni za posamezno fazo gibanja

% `T` so podatki o območju reševanja:

% `T(1)` je časovni korak;

% `T(2)` dolžina časovnega intervala reševanja `[0,T(2)]`;

% `z` so podatki o zračnem uporu, podrsavanju in trku:

% `z(1)` $=\mu_z$ je koeficient zračnega upora;

% `z(2)` $=\mu_s$ je statični koeficient trenja;

% `z(3)` $=\mu_d$ je dinamični koeficient trenja;

% `z(4)` $=e$ je koeficient trka;

% `W` je stolpec hitrost vetra glede na globalni koordinatni sistem:

% `W(1)` $=W_X$ je komponenta hitrosti vetra v smeri globalne osi X;

% `W(2)` $=W_Y$ je komponenta hitrosti vetra v smeri globalne osi Y;

% `W(3)` $=W_Z$ je komponenta hitrosti vetra v smeri globalne osi Z;

% del, ki določa sistem diferencialnih enačb, poskrbi pa tudi za nastavitev začetnih pogojev in lastnosti metode, nastavitev vrednosti parametrov in kontrolo posebnih dogodkov:

```
switch flag
case '' % desna stran diferencialnih enačb
    varargout{1} = f(t,x,data,z,W);
case 'init' % začetni pogoji, območje reševanja, lastnosti numerične metode
    [varargout{1:3}] = init(data,T);
case 'mass' % masna matrika
    varargout{1} = masa(t,x,data);
case 'events' % kontrola posebnih dogodkov
    [varargout{1:3}] = dogodki(t,x,data,z,W);
otherwise
    error(['Neznan parameter''''flag''''.']);
end
```

% desne strani sistema navadnih diferencialnih enačb:

```
function dxdt = f(t,x,data,z,W)
dxdt = [»vektor desnih strani navadnih diferencialnih enačb«];
```

% kotaljenje brez podrsavanja: `dxdt` $=\boldsymbol{f}_{\mathrm{b}}$ (3.25);

% kotaljenje s podrsavanjem: `dxdt` $=\boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}$ (3.61);

% let kroglice: `dxdt` $=\boldsymbol{f}_{\mathrm{l}}$ (4.13);

```
% nastavitev osnovnih parametrov naloge in lastnosti metode:
function [interval,x0,lastnosti] = init(data,T)
interval = (0:T(1):T(2));
x0 = c;
lastnosti = odeset('RelTol',1e-10,'Events','on', ...\n
      'Mass','M(t,y)','MassSingular','Maybe');

% upoštevanje masne matrike:
function M = masa(t,x,data)
M = [»masna matrika«];
      % kotaljenje brez podrsavanja: M = Mb (3.26);
      % kotaljenje s podrsavanjem: M = Ms (3.62);
      % let kroglice: M = Ml (4.14);

% kontrola posebnih stanj, v katerih ustavimo integracijo:
function [vrednost,ustavitev,smer]=dogodki(t,x,data,z,W);
vrednost = [»vektor vrednosti«];
ustavitev = [»vektor logičnih vrednosti (1-ustavi, 0-nadaljuj)«];
smer = [»s katere smeri gredo komponente vektorja 'vrednost' proti 0«];
```

5.1.1.1 Zaznavanje dogodkov

Med reševanjem enačb za posamezno vrsto gibanja kontroliramo pogoje za zaključek te faze in začetek nove. Preverjanje pogojev v vsakem koraku reševanja izvajamo s pomočjo vgrajene funkcije `events`. V nastavitvah lastnosti numerične metode – funkcija `odeset` – parameter `events` nastavimo na vrednost '`on`', s čimer metodi omogočimo, da lahko poišče čas dogodka in takratne vrednosti posameznih spremenljivk. Dogodke, ki bi jih radi zaznali, opišemo s posebno funkcijo `dogodki`. Osnovna shema funkcije in vhodni podatki, ki jih prejema, so prikazani že v shemi 5.1.1. Funkcija `dogodki` mora vrniti tri vektorje enakih velikosti:

- `vrednost` so matematični pogoji, ki jih opazujemo – dogodke, ki jih želimo zaznati, moramo opisati v obliki funkcij neznank naloge, tako da dogodek v splošnem ni izpolnjen;

- `ustavitev` je vektor logičnih vrednosti 1 ali 0, s katerimi dosežemo ustavitev računa ob zaznanem dogodku – vrednost 1, če pa želimo dogodek samo zaznati, ob tem pa ne ustaviti računa, nastavimo komponento vektorja `ustavitev` na 0;
- `smer` je vektor logičnih vrednosti −1, 0 in 1, s katerimi podrobneje opredelimo, kakšen dogodek zaznavamo. Komponenta vektorja `smer` dobi vrednost −1, ko istoležna komponenta v vektorju `vrednost` spremeni predznak iz pozitivnega v negativnega, vrednost 1, ko istoležna komponenta v vektorju `vrednost` spremeni predznak iz negativnega v pozitivnega, ko pa je vseeno, v kateri smeri istoležna komponenta spremeni predznak, ji pripišemo vrednost 0.

V poglavjih 3.3, 3.4, 4.2 in 4.4 smo že zapisali dogodke, ki jih zaznavamo v posameznih fazah gibanja.

V fazi kotaljenja brez podrsavanja zaznavamo dva dogodka: prehod v kotaljenje s podrsavanjem in odlepitev kroglice od podlage. Do začetka podrsavanja pride, ko razmerje med tangencialno in normalno reakcijsko silo ($T/N = \nu$) preseže vrednost statičnega koeficienta trenja (μ_S= `z(2)`). Ustrezna komponenta vektorja `vrednost`, ki bo ob prehodu v podrsavanje spremenila predznak, je zato `z(2)`$-\nu$. Odlepitev kroglice od podlage pa nastopi, ko normalna komponenta reakcijske sile ($N = R_z$) postane negativna. Druga komponenta vektorja `vrednost` je tako kar enaka R_z. Komponenti vektorja `ustavitev` sta enaki 1, saj moramo reševanje enačb kotaljenja brez podrsavanja v obeh primerih ustavitve končati. Obe komponenti vektorja `smer` pa sta enaki −1, saj se ničli v obeh primerih približujemo s pozitivne strani. Funkcija `ustavitev` pri kotaljenju brez podrsavanja ima na primer tako obliko:

```
% račun reakcij in razmerja ν za kotaljenje brez podrsavanja:
[ν,Rx,Ry,Rz]=trenje_brez_podrsavanja(x,data,z,W);

vrednost = [z(2)-ν;Rz];
ustavitev = [1;1];
smer = [-1;-1];
```

Pri kotaljenju s podrsavanjem moramo reševanje ustaviti, ko hitrost v dotikališču doseže vrednost nič – možnost prehoda v kotaljenje brez podrsavanja in ko reakcija R_z postane negativna – kroglica se odlepi od podlage. Komponenti vektorja `vrednost` sta zato v_B in R_z. Ko hitrost v dotikališču doseže vrednost nič, moramo preveriti dodatni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja. Če je pogoj izpolnjen, moramo reševanje enačb kotaljenja s podrsavanjem prekiniti – dotikališčni hitrosti istoležna komponenta v vektorju `ustavitev` dobi vrednost 1. Če pogoj ni izpolnjen, nadaljujemo z računom kotaljenja s podrsavanjem – komponenta v vektorju `ustavitev` dobi vrednost 0. Tudi v primeru odlepitve moramo prekiniti reševanje enačb kotaljenja s podrsavanjem – druga komponenta vektorja `ustavitev` je enaka 1. Hitrost dotikališča se vrednosti nič lahko približuje s pozitivne in negativne smeri, reakcija R_z pa s pozitivne. Ustrezne vrednosti vektorja smer sta tako enaki 0 in −1. Shema funkcije `dogodki` pri kotaljenju s podrsavanjem je torej:

```
% račun reakcij pri kotaljenju s podrsavanjem:
Rz = trenje_s_podrsavanjem(x,data,z,W);

vrednost = [vB; Rz];
ustavitev = [1; 1];

if abs(vB) < 10^-5
      % račun reakcij za kotaljenje brez podrsavanja:
    [v,Rx,Ry,Rz]=trenje_brez_podrsavanja(x,data,z,W);
    if v < z(2)
     ustavitev = [0; 1];
    end
end

smer = [0; -1];
```

V fazi leta iščemo trenutek, ko se kroglica dotakne podlage – dogodek smo podrobneje opisali v poglavju 4.2. Iščemo trenutek, ko je za enega od delcev kroglice s koordinatami (X_K, Y_K, Z_K) razdalja $d = Z_K - f(X_K, Y_K)$ enaka nič. Edina komponenta vektorja `vrednost` je zato razdalja d. Ustrezna vrednost vektorja `ustavitev` je enaka 1, vektorja `smer` pa −1. Shema funkcije `dogodki` pri letu kroglice je taka:

% kroglico določimo z Matlabovo vgrajeno funkcijo sphere, sphere(100) aproksimira kroglo s 101 točko:

[ξ_K,η_K,ζ_K]= sphere(100);

% z enačbami (4.17) določimo globalne koordinate točk kroglice (X_K,Y_K,Z_K);

% za vsak par X_K, Y_K določimo točko na ploskvi $Z_B = f(X_K, Y_K)$:

d = $Z_K - Z_B$;

```
vrednost = d;
ustavitev = 1;
smer = -1;
```

5.2 Uporaba numeričnih metod na opisnih datotekah

S tako pripravljenimi opisnimi datotekami poiščemo rešitve enačb za posamezno fazo gibanja z ukazom oblike:

[t, $\mathbf{X}$] = metoda('naloga',[],[],[],data,x0,T,z,W).

'metoda' je ena od vgrajenih metod za reševanje diferencialnih enačb. Za reševanje enačb kotaljenja brez in s podrsavanjem uporabimo metodo `ode23t`, ki je sposobna reševati sisteme zmerno togih enačb in nima težav z singularnostjo masne matrike pri prehodu iz kotaljenja brez v kotaljenje s podrsavanjem. Za reševanje sistema enačb leta uporabimo metodo `ode45`. Niz 'naloga' je ime opisne datoteke, v kateri smo definirali sistem enačb za posamezno fazo gibanja: `kotaljenje_ode_b`, `kotaljenje_ode_s` ali `let_ode`, na koncu pa podamo še parametre, ki jih potrebuje opisna datoteka: `data`, `x0`, `T`, `z`, `W`. Metoda vrne dva rezultata:

- t je stolpec časov, v katerih je metoda izračunala numerične rešitve sistema enačb;
- $\mathbf{X}$ je matrika numeričnih rešitev. V posameznem stolpcu matrike so zapisane vrednosti za eno od spremenljivk sistema pri ustreznih časih t.

Rešitve za fazo trka dobimo s klicem funkcije (datoteke) `trk`, v kateri so zapisane analitične rešitve:

[$v_{x,trk}$, $v_{y,trk}$, $v_{z,trk}$, $\Omega_{x,trk}$, $\Omega_{y,trk}$, $\Omega_{z,trk}$, $v_{B,trk}$, α_{trk}, p^*, p_k, p_{trk}]=trk(data,c,z);

Funkcija za vhodne podatke prejme podatke o kroglici – `data`, vrednosti spremenljivk: v_x, v_y, v_z, Ω_x, Ω_y, Ω_z ob koncu leta, zapisane v vektorju `c`, ter podatke o koeficientih trenja in trka –

`z`. Izhodne vrednosti so vrednosti spremenljivk ob koncu trka ter vrednosti impulzov normalne sile med trkom.

Združeno reševenje sistemov enačb kotaljenja brez in s podrsavanjem ter leta po zraku, ki jim dodamo še analitične rešitve za fazo trka, zapišemo v datoteko `gibanje_kroglice.m`. Dobljene rezultate želimo tudi ustrezno prikazati. To storimo v obliki grafov, ki kažejo spreminjanje posameznih neznank s časom in s 3D animacijo gibanja.

5.2.1 Funkcija gibanje kroglice

`gibanje_kroglice(c,data,z,W,T,azim)` je funkcija, ki nariše grafe količin in prikaže film gibanja kroglice v odvisnosti od osnovnih parametrov:

- `c` – začetni podatki o gibanju kroglice,
- `data` – podatki o kroglici in težnostnem pospešku,
- `z` – koeficienti zračnega upora, trenja in trka,
- `W` – podatki o vetru,
- `T` – časovni korak in interval računa,
- `azim` – zorni kot opazovalca.

Pomen komponent vektorjev `data`, `z`, `W` in `T` smo že spoznali v shemi opisne datoteke.

Komponenti vektorja `azim` sta:

- `azim(1)` je odklonski kot opazovalca od osi $-Y$ v ravnini XY (v stopinjah),
- `azim(2)` pa je naklonski kot opazovalca glede na ravnino XY (v stopinjah).

`c` je vektor začetnih pogojev, v katerem že upoštevamo vezne enačbe:

- če želimo začeti z analizo gibanje kroglice v fazi leta, v vektor `c` podamo 9 neodvisnih začetnih pogojev:
  - `c(1)` $= X_T^0$ – začetna X koordinata težišča,
  - `c(2)` $= Y_T^0$ – začetna Y koordinata težišča,
  - `c(3)` $= Z_T^0$ – začetna Z koordinata težišča,
  - `c(4)` $= V_X^0$ – začetna hitrost v smeri globalne osi X,
  - `c(5)` $= V_Y^0$ – začetna hitrost v smeri globalne osi Y,
  - `c(6)` $= V_Z^0$ – začetna hitrost v smeri globalne osi Z,

   - `c(7)` $=\Omega_X^0$ – začetna kotna hitrost okrog globalne osi X,
   - `c(8)` $=\Omega_Y^0$ – začetna kotna hitrost okrog globalne osi Y,
   - `c(9)` $=\Omega_Z^0$ – začetna kotna hitrost okrog globalne osi Z,
- če pa želimo začeti z analizo kotaljenja, v vektor `c` podamo 7 začetnih pogojev:
   - `c(1)` $=X_B^0$ – začetna X koordinata dotikališča,
   - `c(2)` $=Y_B^0$ – začetna Y koordinata dotikališča,
   - `c(3)` $=\Omega_x^0$ – začetna kotna hitrost okrog lokalne osi x,
   - `c(4)` $=\Omega_y^0$ – začetna kotna hitrost okrog lokalne osi y,
   - `c(5)` $=\Omega_z^0$ – začetna kotna hitrost okrog lokalne osi z,
   - `c(6)` $=v_B^0$ – začetna hitrost dotikališča,
   - `c(7)` $=\alpha^0$ – začetna smer delovanja sile trenja ($\beta^0=\pi+\alpha^0$ je začetna smer hitrosti dotikališča; smer, ki jo začetna hitrost dotikališča oklepa z lokalno osjo x).
- Začetne vrednosti Eulerjevih zasukov ψ, ϑ in φ so v programu podane z vnaprej določenimi vrednostmi: $\psi=0$, $\vartheta=\pi/2$ (s tem poskrbimo, da nobena od matrik $\mathbf{M}_b$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_l$ ni singularna v prvem koraku integracije), $\varphi=0$.

Algoritem ima dva bistvena dela. V prvem delu najprej ugotovimo, s kakšno vrsto gibanja začnemo glede na podane začetne vrednosti. Nato poženemo reševanje enačb za to fazo gibanja. Ko se ta konča, ugotovimo, zakaj je prišlo do prekinitve in pripravimo podatke za naslednjo fazo. Prehod v novo fazo napovemo z indeksom `ind`, ki ga pripišemo posamezni fazi gibanja:

- let po zraku oziroma prehod iz trenutne faze v fazo leta označimo z `ind` = 1,
- kotaljenje brez podrsavanja oziroma prehod iz trenutne faze v fazo kotaljenja brez podrsavanja označimo z `ind` = 2,
- kotaljenje s podrsavanjem oziroma prehod iz trenutne faze v fazo kotaljenja s podrsavanjem označimo z `ind` = 3.

Drugi del je zanka, v kateri se menjujejo algoritmi za analizo posamezne faze gibanja. Vsi algoritmi so podobno sestavljeni: najprej vzamemo zadnji rezultat prejšnje faze gibanja – to so začetni pogoji za novo fazo, nato poženemo reševanje enačb za to vrsto gibanja; ko se ta konča, ugotovimo zakaj je do prekinitve prišlo in pripravimo podatke za naslednjo fazo gibanja.

Manjšo težavo pri enotnem zapisu rezultatov predstavlja različno število neznank, s tem pa tudi rešitev posameznih nalog. V fazah kotaljenja brez in s podrsavanjem imamo 14 neznank, zato ima matrika **X**, ki je rešitev nalog `kotaljenje_ode_b` ali `kotaljenje_ode_s`, 14 stolpcev. V fazi leta imamo 12 neznank, zato je v matriki rešitev naloge `let_ode` 12 stolpcev. V primerjavi z matriko rešitev nalog za obe vrsti kotaljenja manjkata 4. in 5. stolpec, v katerih so zapisane vrednosti kotov Ψ in Θ. Zato, da bo spajanje rešitev za vse tri faze gibanja čim lažje, v matriko rešitev faze leta vrinemo stolpca, v katerih so zapisane vrednosti kotov Ψ in Θ. Te vrednosti so med letom enake π oziroma 0, ker pa v enačbah ne nastopata, na gibanje ne vplivata, zato jima lahko pripišemo poljubni vrednosti. Odločimo se, da vrednosti Ψ in Θ v fazi leta določimo v točki na ploskvi, ki je v danem trenutku najbližje leteči kroglici. Algoritem, ki podaja račun kotov Ψ in Θ v fazi leta, je zelo podoben algoritmu, ki v nalogi `let_ode` zaznava trenutek trka, zato ga posebej ne podajamo. Taka izbira kotov Ψ in Θ v fazi leta je ugodna iz najmanj dveh pogledov. V trenutku trka – ob koncu leta moramo poznati vrednosti obeh kotov, če želimo opraviti transformacijo iz globalnega v lokalni koordinatni sistem (ki ga določimo v dotikališčni točki; to je točka, ki je v danem trenutku najbližja kroglici), v katerem opisujemo količine v fazi trka. Z zgoraj opisanim algoritmom vrednosti Ψ in Θ v trenutku trka tako že poznamo. Druga dobra lastnost take izbire računa kotov je, da v vsakem trenutku leta poznamo točko na kroglici, ki je najbližja podlagi; ravno to točko pa izberemo za risanje sledi v fazi leta (v fazi kotaljenja je to dotikališčna točka).

Programa zaradi precejšnjega obsega v besedilu ne navajamo v celoti.

5.2.1.1 *Algoritem začetnega dela*

Algoritem je opisan v dodatku A.

6 RAČUNSKI PRIMERI

6.1 Gibanje v ravnini (X, Z)

6.1.1 Analitično reševanje

Numerične rešitve najlažje preverimo na primerih, za katere imamo analitične rešitve. Tak primer je gibanje kroglice v ravnini (X, Z). Ob pregledu izpeljav v začetnih poglavjih hitro ugotovimo, da je število neznank, ki opisujejo gibanje v ravnini, manjše, ker imajo nekatere spremenljivke v naprej predpisane vrednosti:

$$\begin{aligned} &\Psi = \pi, \quad \psi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \Omega_x = 0, \quad \Omega_z = 0, \\ &Y_T = konst., \quad v_y = 0, \quad \alpha = 0. \end{aligned} \tag{6.01}$$

Za namene primerjav z analitičnimi rešitvami lahko brez škode za oceno natančnosti zanemarimo vpliv vetra in zračnega upora: $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$, $\mu_z = 0$. Vrednosti spremenljivk v (6.01) upoštevamo v sistemih enačb kotaljenja brez podrsavanja (okno 1), kotaljenja s podrsavanjem (okno 3) in prostega leta kroglice (okno 5). Pri tem se izkaže, da so nekatere od enačb identično izpolnjene, druge pa se poenostavijo. Poenostavljeni sistemi enačb, ki vodijo gibanje kroglice v ravnini (X, Z), so zapisani v oknih 8, 9 in 10.

Okno 8: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja v ravnini (X, Z).

Osnovne neznanke: $X_T, Z_T, \Theta, v_x, v_z, \vartheta, \Omega_y$

$[B_1]$ $\dot{X}_T \cos\Theta + \dot{Z}_T \sin\Theta = v_x$

$[B_3]$ $-\dot{X}_T \sin\Theta + \dot{Z}_T \cos\Theta = v_z$

$[B_4]$ $\dot{v}_x - a\dot{\Omega}_y = 0$

$[B_6]$ $\dot{v}_z = 0, \qquad (v_z = 0)$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[B_8] \quad \dot{\Theta} m a v_z - a m \dot{v}_x - A \dot{\Omega}_y = m g a \sin\Theta$$

$$[B_{11}] \quad -\dot{\Theta} + \dot{\vartheta} = \Omega_y$$

$$[B_{13}] \quad \dot{X}_T k_{11} - \dot{\Theta}\cos\Theta\left(-k_{11} a + \frac{1}{\cos^3\Theta}\right) = 0$$

Odvisne neznanke: R_x, R_z

$$[O_1] \quad R_x = m\dot{v}_x + mg\sin\Theta$$

$$[O_2] \quad R_z = m\dot{v}_z + mg\cos\Theta$$

Pomožna enačba:

$$[P_4] \quad k_{11} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$$

Začetni pogoji pri $t = t_0$:

$$X_B(t_0) = X_B^0, \quad v_x(t_0) = v_x^0, \quad v_z(t_0) = v_z^0, \quad \vartheta(t_0) = \vartheta^0, \quad \Omega_y(t_0) = \Omega_y^0$$

vezne enačbe:

$$Z_B^0 = f\left(X_B^0\right), \quad X_T^0 = X_B^0 + a\sin\Theta^0, \quad Z_T^0 = Z_B^0 + a\cos\Theta^0$$

$$\tan\Theta^0 = \left|k_1^0\right|, \quad v_x^0 - a\Omega_y^0 = 0, \quad v_z^0 = 0.$$

Okno 9: Sistem enačb kotaljenja s podrsavanjem v ravnini (*X*, *Z*).

Osnovne neznanke: $X_T, Z_T, \Theta, v_B, v_z, \vartheta, \Omega_y$

$$[S_1] \quad \dot{X}_T\cos\Theta + \dot{Z}_T\sin\Theta = -v_B + a\Omega_y$$

$$[S_3] \quad -\dot{X}_T\sin\Theta + \dot{Z}_T\cos\Theta = v_z$$

$$[S_4] \quad \dot{\Theta} m\left[-v_z - \mu\left(-v_B + a\Omega_y\right)\right] - \dot{v}_B m - \dot{v}_z \mu m\cos\alpha + \dot{\Omega}_y m a = \\ = -mg\sin\Theta + \mu m g\cos\Theta$$

$$[S_6] \quad \dot{v}_z = 0$$

$$[S_8] \quad \dot{\Theta}\mu m a\left(-v_B + a\Omega_y\right) + \mu m a\dot{v}_z + A\dot{\Omega}_y = -a\mu m g\cos\Theta$$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[S_{11}] \quad -\dot{\Theta} + \dot{\vartheta} = \Omega_y$$

$$[S_{13}] \quad \dot{X}_T k_{11} + -\dot{\Theta}\cos\Theta\left(-k_{11}a + \frac{1}{\cos^3\Theta}\right) = 0$$

Odvisne neznanke: T, R_x, R_z, v_x

$$[O_1] \quad T = \mu m \dot{v}_z + \left(-v_B + a\Omega_y\right)\mu m\dot{\Theta} + \mu m g\cos\Theta$$

$$[O_2] \quad R_x = T$$

$$[O_4] \quad R_z = \frac{1}{\mu}T$$

$$[O_5] \quad v_x = -v_B + a\Omega_y$$

Pomožna enačba:

$$[P_4] \quad k_{11} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$$

Začetni pogoji pri $t = t_0$:

$$X_B(t_0) = X_B^0, \quad v_B(t_0) = v_B^0, \quad v_z(t_0) = v_z^0, \quad \vartheta(t_0) = \vartheta^0, \quad \Omega_y(t_0) = \Omega_y^0,$$

vezne enačbe:

$$Z_B^0 = f\left(X_B^0\right), \qquad X_T^0 = X_B^0 + a\sin\Theta^0, \qquad Z_T^0 = Z_B^0 + a\cos\Theta^0$$

$$\tan\Theta^0 = \left|k_1^0\right|, \quad v_z^0 = 0.$$

Okno 10: Sistem enačb leta kroglice v ravnini (X, Z).

Osnovne neznanke: $X_T, Z_T, V_X, V_Z, \vartheta, \Omega_Y$

$$[L_1] \quad \dot{X}_T = V_X$$

$$[L_3] \quad \dot{Z}_T = V_Z$$

$$[L_4] \quad m\dot{V}_X = 0$$

$$[L_6] \quad m\dot{V}_z = -mg$$

se nadaljuje …

… nadaljevanje

$$[L_8] \quad \dot{\Omega}_Y = 0$$

$$[L_{11}] \quad \dot{\vartheta} = \Omega_Y$$

Začetni pogoji pri $t = t_0$:

$$X_T(t_0) = X_T^0, \qquad Z_T(t_0) = Z_T^0, \qquad V_X(t_0) = V_X^0,$$
$$V_Z(t_0) = V_Z^0, \qquad \vartheta(t_0) = \vartheta^0, \qquad \Omega_Y(t_0) = \Omega_Y^0.$$

Analitične rešitve enačb ravninskega gibanja

Rešitve enačb leta so trivialne:

$$\begin{aligned}
X_T(t) &= X_T^0 + V_X^0\, t, \\
Z_T(t) &= Z_T^0 + V_Z^0\, t - \frac{1}{2} g t^2, \\
V_X(t) &= V_X^0, \\
V_Z(t) &= V_Z^0 - g t, \\
\Omega_Y(t) &= \Omega_Y^0, \\
\vartheta(t) &= \vartheta^0 + \Omega_Y^0\, t.
\end{aligned} \tag{6.02}$$

Sistema enačb kotaljenja brez in s podrsavanjem pa za poljubno podlago $Z = f(X)$ ostajata še vedno precej zapletena. Analitične rešitve so možne za poseben primer, ko je ploskev kotaljenja poljubna nagnjena ravnina $Z = kX + n$. Tedaj velja $k = k_I = \tan\Theta = konst.$ in rešitve enačb lahko hitro poiščemo. Navajamo jih brez izpeljav.

Kotaljenje brez podrsavanja:

$$
\begin{aligned}
&X_T(t) = X_T^0 + \Omega_y^0 at\cos\Theta - \frac{1}{2}\frac{mga^2}{ma^2+A}t^2\sin\Theta\cos\Theta,\\
&Z_T(t) = Z_T^0 + \Omega_y^0 at\sin\Theta - \frac{1}{2}\frac{mga^2}{ma^2+A}t^2\sin^2\Theta,\\
&v_x(t) = a\Omega_y^0 - \frac{mga^2}{ma^2+A}t\sin\Theta,\\
&v_z = 0,\\
&\Omega_y(t) = \Omega_y^0 - \frac{mga}{ma^2+A}t\sin\Theta,\\
&\vartheta(t) = \vartheta^0 + \Omega_y^0\cdot t - \frac{1}{2}\frac{mga}{ma^2+A}t^2\sin\Theta,\\
&R_x = -\frac{m^2ga^2}{ma^2+A}\sin\Theta + mg\sin\Theta = \frac{2}{7}mg\sin\Theta,\\
&R_z = mg\cos\Theta.
\end{aligned}
\tag{6.03}
$$

Kotaljenje s podrsavanjem:

$$
\begin{aligned}
&X_T(t) = X_T^0 + \left(-v_B^0 + a\Omega_y^0\right)t\cos\Theta - \frac{1}{2}\left(\cos\Theta\sin\Theta - \mu\cos^2\Theta\right)gt^2,\\
&Z_T(t) = Z_T^0 + \left(-v_B^0 + a\Omega_y^0\right)t\sin\Theta - \frac{1}{2}\left(\sin^2\Theta - \mu\cos\Theta\sin\Theta\right)gt^2,\\
&v_B(t) = v_B^0 + \left[\sin\Theta - \mu\cos\Theta\left(\frac{ma^2}{A}+1\right)\right]\cdot gt,\\
&v_z = 0,\\
&\Omega_y(t) = \Omega_y^0 - \frac{\mu mga}{A}t\cos\Theta,\\
&\vartheta(t) = \vartheta^0 + \Omega_y^0 t - \frac{1}{2}\frac{\mu mga}{A}t^2\cos\Theta,\\
&T = R_x = \mu mg\cos\Theta,\\
&R_z = mg\cos\Theta.
\end{aligned}
\tag{6.04}
$$

Trk pri ravninskem gibanju:

- trk s podrsavanjem:

$$
\begin{aligned}
&v_B(p) = v_B^0 - p\,\mu_T\left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{A}\right),\\
&v_z(p) = v_z^0 + \frac{p}{m},\\
&\Omega_y(p) = \Omega_{y0} - p\frac{\mu_T a}{A},\\
&p_T = p_x = \mu_T p,\\
&v_x = -v_B^0 + a\,\Omega_{y0} + \frac{p\,\mu_T}{m};
\end{aligned}
\tag{6.05}
$$

- Trk brez podrsavanja:

$$
\begin{aligned}
&v_x(p) = -v_B^0 + a\,\Omega_{y0} + \frac{p^*\,\mu_T}{m} = konst.,\\
&v_z(p) = v_z^0 + \frac{p}{m},\\
&\Omega_y(p) = \Omega_{y0} - p^*\frac{\mu_T a}{A},\\
&p_x(p) = \mu_T p^* = konst.
\end{aligned}
\tag{6.06}
$$

6.1.2 Let, trk in kotaljenje po ravnem pobočju

Numerično reševanje in delovanje programa, s poudarkom na prehajanju med posameznimi fazami gibanja preverimo na primeru gibanja po poševni. Zanima nas predvsem prehod iz faze leta v trk in trka v kotaljenje. Relief je ravno pobočje s 35% naklonom; opišemo ga s funkcijo $Z = 0.35\,X$. Obravnavano telo je krogla s polmerom $0.3\,\mathrm{m}$ in z maso $150\,\mathrm{kg}$ (natančnejši pregled izrazov (6.02)–(6.06), (4.85) in (4.100) pove, da je gibanje krogle v vseh fazah neodvisno od njene mase; masa vpliva samo na velikost reakcij in impulzov trčnih sil). Gibanje opazujemo ob zanemarjenih vplivih vetra in zračnega upora, statični in dinamični koeficient trenja sta 0.5, koeficient trka e je 0.4. Gibanje začnemo opazovati v trenutku, ko krogla poleti. Začetni koordinati težišča sta $X_T = 0\,\mathrm{m}$, $Z_T = 3\,\mathrm{m}$, začetna težiščna hitrost $V_X = 10\,\mathrm{m/s}$, začetna kotna hitrost $\Omega_Y = 20\,\mathrm{s}^{-1}$. Numerično reševanje poženemo z ukazom:

```
gibanje_kroglice([0,0,3,10,0,0,0,20,0], ...\n
    [150,0.3,9.81],[0,0.5,0.5,0.4],[0,0,0],[0.01,4],[-20,10]).
```

V sklopu analitičnega reševanja najprej določimo trenutek, ko krogla trči s pobočjem. Globalni koordinati delca, ki je med letom najbližje podlagi, sta $X_K = X_T + a\sin\Theta$, $Z_K = Z_T - a\cos\Theta$. V trenutku trka je $Z_K = kX_K + n = X_K \tan\Theta + n$ oziroma

$$Z_T - a\cos\Theta = \left(X_T + a\sin\Theta\right)\tan\Theta + n. \tag{6.07}$$

Upoštevamo reštive za $X_T(t)$ in $Z_T(t)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} &Z_T^0 + V_Z^0 t - \frac{gt^2}{2} - a\cos\Theta = \left(X_T^0 + V_X^0 t + a\sin\Theta\right)\tan\Theta + n, \\ &t_L = \frac{1}{g}\left[\left(V_Z^0 - V_X^0 \tan\Theta\right) + \sqrt{\left(V_X^0 \tan\Theta - V_Z^0\right)^2 + 2g\left(Z_T^0 - X_T^0 \tan\Theta - \frac{a}{\cos\Theta} - n\right)}\right]. \end{aligned} \tag{6.08}$$

V obravnavanem primeru je $n = 0$, $\Theta = \arctan(0.35)$. Z rešitvami (6.02), (6.05), (6.06) in (6.08) določimo število trkov krogle s pobočjem, da bo izpolnjen pogoj za začetek kotaljenja: $v_z(p_{trk}) < 10^{-4}$. V tabeli 1 je prikazana primerjava analitičnih in numeričnih rešitev za trajanje faz leta t_L in velikosti hitrosti težišča v smeri normale ob koncu trkov: $v_z(p_{trk})$. Pogoj o prehodu iz izmenjavanja faz leta in trka v kotaljenje je z analitičnim in numeričnim reševanjem izpolnjen ob koncu trinajstega trka.

Tabela 1: Primerjava analitičnih in numeričnih rešitev za trajanje faz leta in težiščnih hitrosti v smeri normale ob koncu trkov.

	t_L (s)		$v_z(p_{trk})$ (m/s)	
števec trkov	analitična rešitev	numerična rešitev	analitična rešitev	numerična rešitev
1	$4.6426 \cdot 10^{-1}$	$4.6426 \cdot 10^{-1}$	3.0409	3.0409
2	$6.5684 \cdot 10^{-1}$	$6.5684 \cdot 10^{-1}$	1.2164	1.2164
3	$2.6273 \cdot 10^{-1}$	$2.6273 \cdot 10^{-1}$	0.48654	0.48654
4	$1.0509 \cdot 10^{-1}$	$1.0509 \cdot 10^{-1}$	0.19462	0.19461
5	$4.2037 \cdot 10^{-2}$	$4.2033 \cdot 10^{-2}$	0.077847	0.077833
6	$1.6815 \cdot 10^{-2}$	$1.6812 \cdot 10^{-2}$	0.031139	0.031133
7	$6.7260 \cdot 10^{-3}$	$6.7248 \cdot 10^{-3}$	0.012456	0.012453

se nadaljuje …

… nadaljevanje

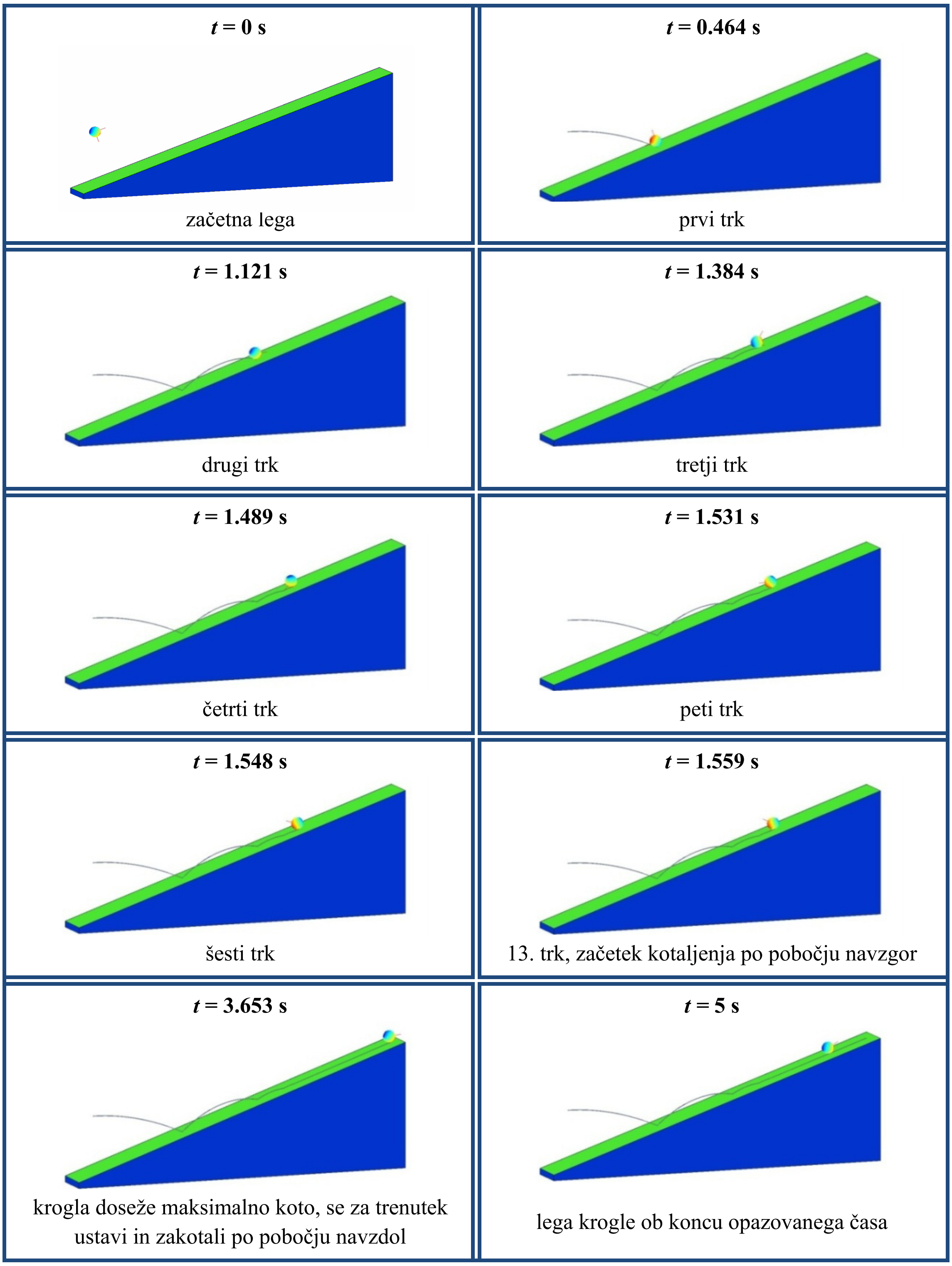
8	$2.6904 \cdot 10^{-3}$	$2.6899 \cdot 10^{-3}$	0.0049822	0.0049812
9	$1.0762 \cdot 10^{-3}$	$1.0758 \cdot 10^{-3}$	$1.9929 \cdot 10^{-3}$	$1.9921 \cdot 10^{-3}$
10	$4.3046 \cdot 10^{-4}$	$4.3007 \cdot 10^{-4}$	$7.9715 \cdot 10^{-4}$	$7.9599 \cdot 10^{-4}$
11	$1.7219 \cdot 10^{-4}$	$1.7135 \cdot 10^{-4}$	$3.1886 \cdot 10^{-4}$	$3.1623 \cdot 10^{-4}$
12	$6.8874 \cdot 10^{-5}$	$6.6810 \cdot 10^{-5}$	$1.2754 \cdot 10^{-4}$	$1.2095 \cdot 10^{-4}$
13	$2.7550 \cdot 10^{-5}$	$2.1467 \cdot 10^{-5}$	$5.1018 \cdot 10^{-5}$	$3.1127 \cdot 10^{-5}$

Trajanje faz leta od šestega trka dalje je tako kratko, da se preostale količine ob koncu trkov le malo spremenijo – tabela 2. Zato bi lahko pogoj za začetek kotaljenja v programu zapisali tudi manj strogo: $v_z(p_{trk}) < 10^{-2}$, s čimer pri hkrati skoraj nespremenjeni natančnosti prihranimo na računskem času, kar je ugodno predvsem pri analizi kompleksnejših primerov.

Tabela 2: Vrednosti spremenljivk ob koncu 7. in 13. trka pri pogoju $v_z(p_{trk}) < 10^{-4}$.

		vrednosti spremenljivk ob koncu 7. trka		vrednosti spremenljivk ob koncu 13. trka	
spremenljivka		analitična reš.	numerična reš.	analitična reš.	numerična reš.
$X_T(p_{trk})$	(m)	10.7155	10.7154	10.7359	10.7358
$Z_T(p_{trk})$	(m)	4.0683	4.0682	4.0754	4.0754
$v_x(p_{trk})$	(m/s)	4.8577	4.8515	4.8475	4.8475
$v_z(p_{trk})$	(m/s)	0.012456	0.012453	0.000051018	0.000031127
$\Omega_y(p_{trk})$	(s^{-1})	16.1925	16.2444	16.1580	16.1582
$\vartheta(p_{trk})$		35.0770	35.0768	35.1493	35.1489
$v_B(p_{trk})$	(m/s)	0	0	0	0
$\alpha(p_{trk})$		0	0	0	0

Sled, ki jo opiše krogla in lega krogle ob dogodkih, ki gibanje najbolj zaznamujejo, sta predstavljeni na sliki 9.



Slika 9: Let, trk in kotaljenje krogle po pobočju s 35% naklonom.

Vrednosti količin ob zadnjem, trinajstem trku so začetne vrednosti za kotaljenje po pobočju. Hitrosti težišča v smeri normale ob tem pripišemo vrednost nič: $v_z(p_{trk}) = v_z^{\,0} = 0$. Ker je hitrost dotikališča enaka nič ($v_B(p_{trk}) = v_B^{\,0} = 0$), je izpolnjen osnovni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja. O tem, ali se bo krogla začela kotaliti s ali brez podrsavanja, odloča dodatni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja, ki ob znanih rešitvah (6.03) dobi preprosto obliko:

$$\frac{T}{N} = \frac{R_x}{R_z} = \frac{2mg\sin\Theta}{7mg\cos\Theta} = \frac{2}{7}\tan\Theta \quad < \quad \mu_s. \tag{6.09}$$

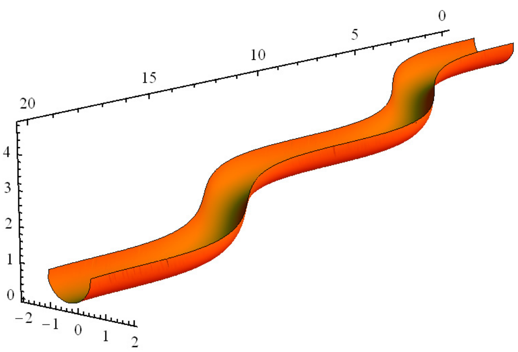
V našem primeru je pogoj izpolnjen:

$$\frac{2}{7}\tan\Theta = \frac{2}{7}\cdot 0.35 = 0.1 \quad < \quad \mu_s = 0.5.$$

Zato se krogla začne kotaliti brez podrsavanja. Ker je $v_x(p_{trk}) = v_x^{\,0} = 4.58\,\mathrm{m/s}$ pozitivna količina, se bo krogla v nadaljevanju najprej še kotalila po pobočju navzgor, ko pa bo s potencialno energijo izrabljena vsa kinetična energija krogle, se bo ustavila in zakotalila po pobočju navzdol. Čas t', pri katerem se bo krogla ustavila, lahko izračunamo s pomočjo analitičnih rešitev in znaša $t' = 3.653\,\mathrm{s}$.

6.2 Gibanje telesa po vodnem toboganu

Zanimiv primer uporabe izpeljanih enačb in napisanega programa je gibanje teles po vodnem toboganu. Študiramo lahko, kako oblika tobogana in koeficient trenja med telesom in toboganom vpliva na gibanje telesa, zanimajo nas hitrosti, ki jih telo doseže med gibanjem, in predvsem obremenitve, ki jih gibanje vnaša na površino, s tem pa tudi v nosilno konstrukcijo tobogana.



Slika 10: Vodni tobogan.

Za ponazoritev uporabe programa in prikaza rezultatov smo si izbrali naslednjo obliko in geometrijo tobogana: prečni prerez je polkrožne oblike, širine 1.6m; tobogan je grajen v naklonu 20% in sinusno vijuga sem in tja na dolžini 20m (slika 10). Podano obliko definirajo točke iz realnega definicijskega območja funkcije:

$$Z(X,Y)=4.8-\frac{X}{5}-\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left[Y+\sin\left(\frac{2X}{3}\right)\right]^2},\quad X\in\{0,20\},\quad Y\in\{-2,2\},\quad Z\in\mathbb{R}.$$

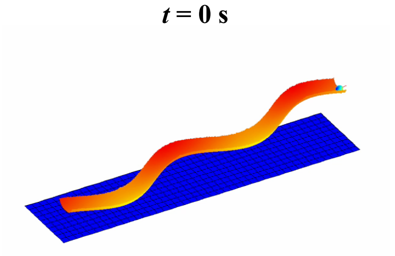
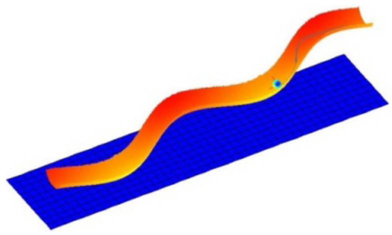
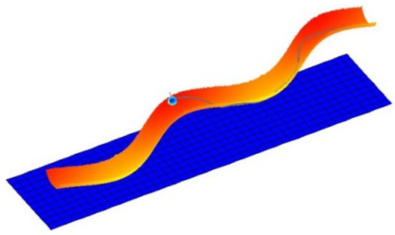
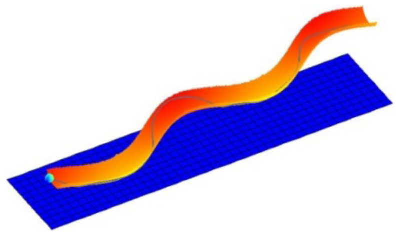
Vpliv koeficienta trenja na gibanje telesa po toboganu

Gibanje po toboganu mora biti varno, kar pomeni, da telo med gibanjem ne sme izgubiti stika s podlago in da ne sme pasti s tobogana. Pri neustrezni obliki in neprimernem koeficientu trenja med površino tobogana in gibajočim se telesom se lahko zgodi, da se telo odlepi od podlage, kar predstavlja nevarnost za uporabnika. Ker smo obliko tobogana določili vnaprej, se posvetimo samo opazovanju vpliva koeficienta trenja na gibanje telesa. Opazovano telo je krogla s polmerom 0.25m in maso 65kg.

Stik teles s podlago je na toboganu ponavadi moker, koeficienti trenja mokrih stikov pa so precej manjši kot pri suhih stikih, zato opazovanje začnemo z majhno vrednostjo koeficienta trenja (za statični in dinamični koeficient trenja uporabimo enako vrednost). Vpliva začetnih pogojev ne študiramo. Telo postavimo na vrh tobogana in opazujemo, kakšno je njegovo gibanje v nadaljevanju. Program poženemo z ukazom:

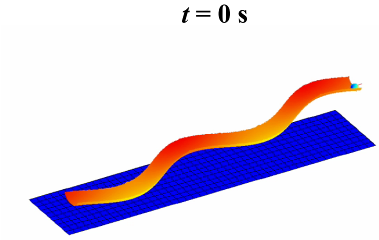
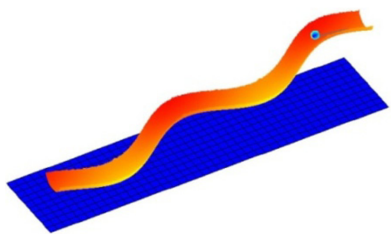
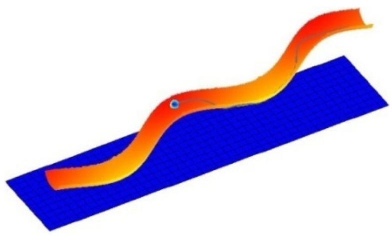
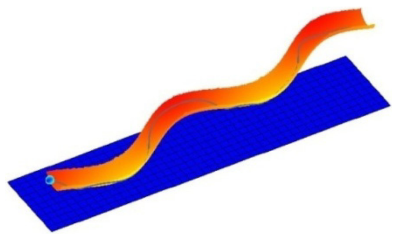
```
gibanje_kroglice([0,0,0,0,0,0,0],[65,0.25,9.81], ...\n
    [0,μs, μd,0.4],[0,0,0],[0.01,7],[-220,40]).
```

- koeficient trenja: $\mu_s = \mu_d = 0.05$

t = 0 s	t = 3.5 s
	
zaradi majhnega koeficienta trenja, krogla že v začetku podrsava	krogla ves čas gibanja podrsava
t = 4.9 s	**t = 6.6 s**
	
krogla se zelo približa robu tobogana	krogla se prikotali do vznožja tobogana in izkoči

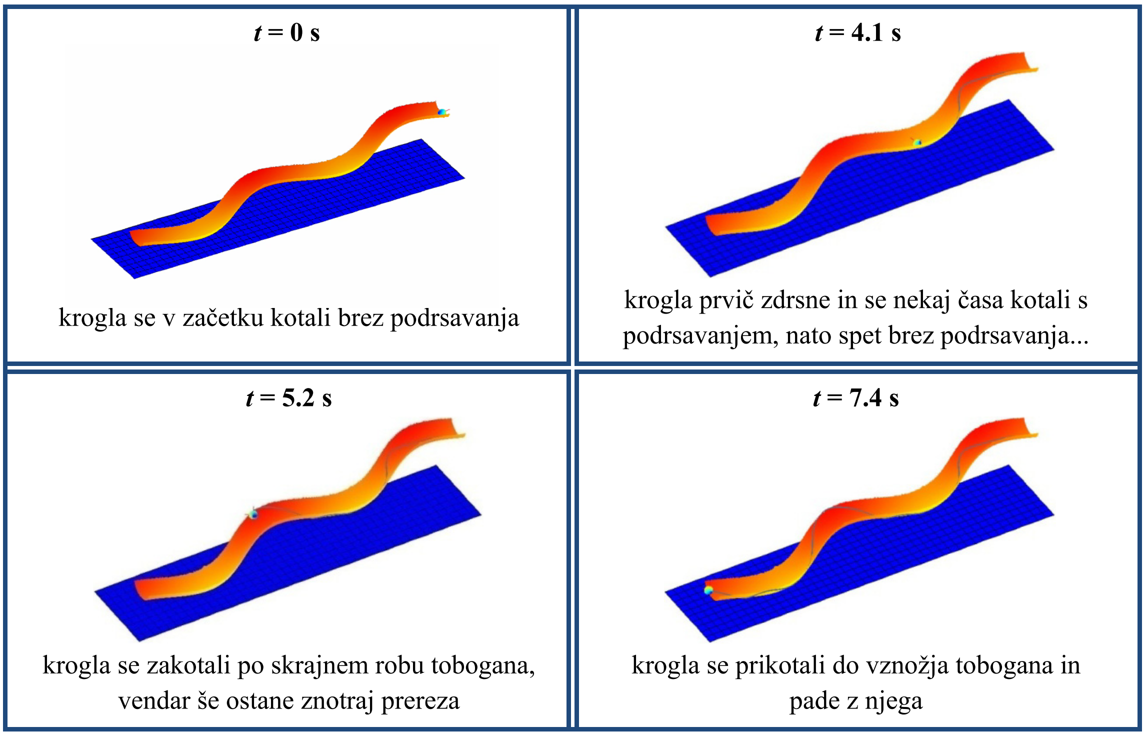
Slika 11: Kotaljenje po toboganu, $\mu_s = \mu_d = 0.05$.

- koeficient trenja: $\mu_s = \mu_d = 0.10$

t = 0 s	t = 2.2 s
	
krogla se v začetku kotali brez podrsavanja	krogla zdrsne in se v nadaljevanju kotali s podrsavanjem
t = 5.1 s	**t = 7.0 s**
	
krogla se zopet zelo približa robu tobogana, vendar manj kot pri vrednosti μ=0.05	krogla se prikotali do vznožja tobogana in izkoči, čas kotaljenja je daljši kot v primeru, ko ves čas podrsava

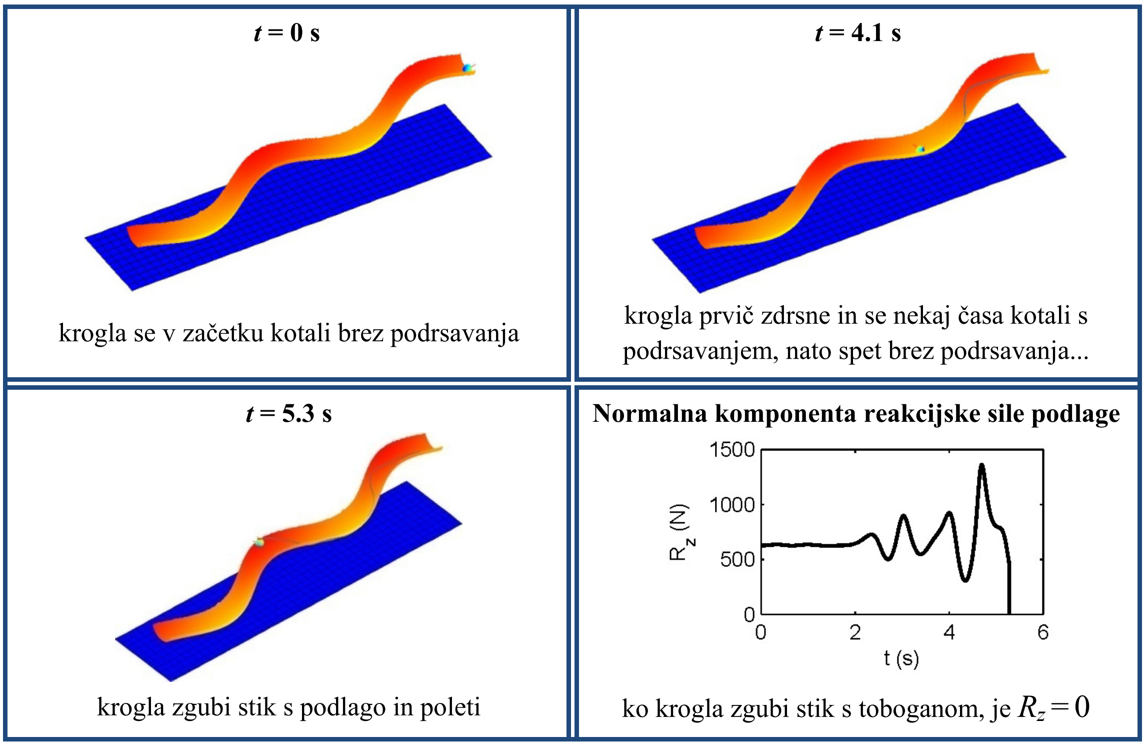
Slika 12: Kotaljenje po toboganu, $\mu_s = \mu_d = 0.10$.

- koeficient trenja: $\mu_s = \mu_d = 0.45$



Slika 13: Kotaljenje po toboganu, $\mu_s = \mu_d = 0.45$.

- koeficient trenja: $\mu_s = \mu_d = 0.50$



Slika 14: Kotaljenje po toboganu, $\mu_s = \mu_d = 0.50$.

Koeficient trenja, ki zagotavlja normalno gibanje telesa po toboganu, sega od vrednosti 0.05 do približno 0.45. Pri vrednostih koeficienta trenja 0.5 in več se telo zakotali preko roba tobogana in pade z njega. Pri izbiri materiala in obdelavi površine tobogana bi bilo zato potrebno paziti, da dosežene vrednosti koeficienta trenja, ki jih dobimo z meritvami, ne presežejo vrednosti 0.5, kar se lahko hitro zgodi; npr. vrednosti koeficienta trenja na mokrem stiku guma – beton znašajo od 0.45 do 0.75.

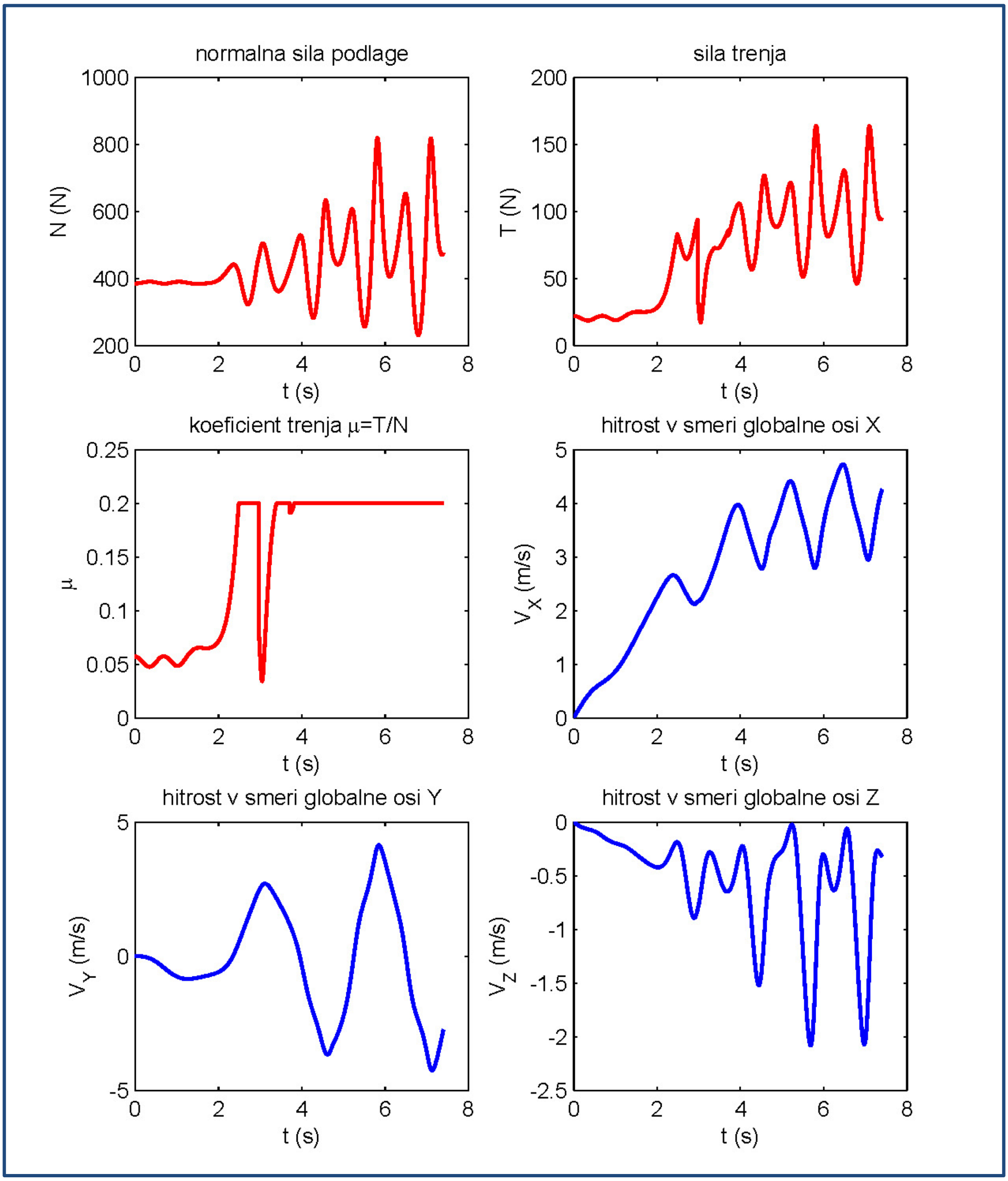
Hitrosti in reakcijske sile pri kotaljenju teles različnih mas in velikosti

Pri dimenzioniranju konstrukcije tobogana in analizi obrabe površine žlebov tobogana nas zanimajo sile, ki jih kotaleča oziroma drseča telesa vnašajo na površino. V našem primeru so to reakcijske sile podlage. Za varnost bodočih uporabnikov je pomemben podatek tudi hitrost teles ob koncu kotaljenja po toboganu ali v trenutku, ko priletijo v vodo. Poglejmo, kako se te količine spreminjajo pri kotaljenju teles različnih mas in velikosti!

Vzemimo tri telesa z masami 40kg, 60kg in 80kg. Premer krogel, s katerimi jih modeliramo, pa izberemo tako, da gostota teles približno ustreza gostoti človeškega telesa. Gibanje vseh treh teles opazujemo pri konstantnih koeficientih trenja $\mu_s = \mu_d = 0.20$. Program poženemo z ukazom:

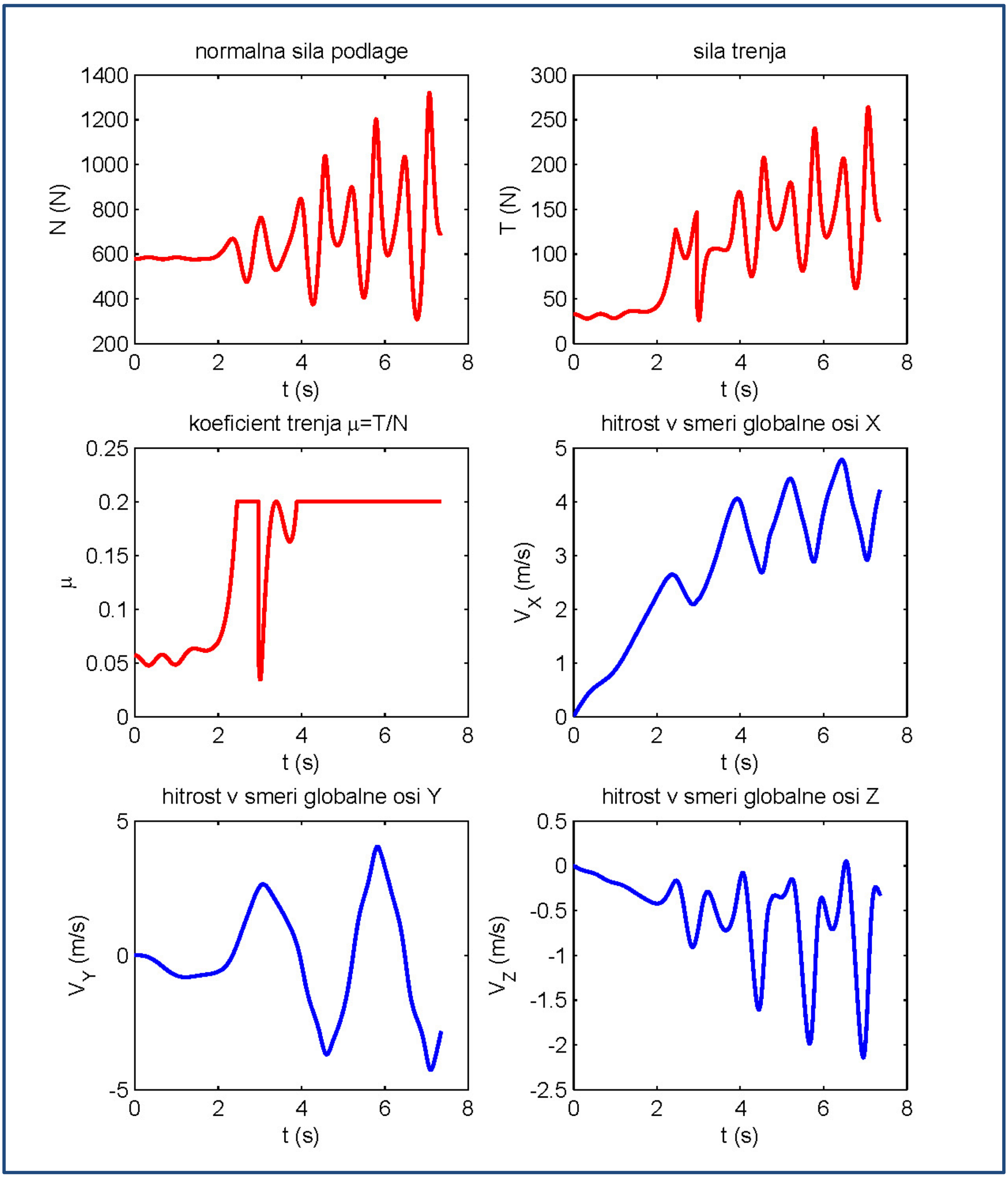
```
gibanje_kroglice([0,0,0,0,0,0,0],[m,a,9.81], ...\n
    [0,0.2,0.2,0.4],[0,0,0],[0.01,7],[-220,40]).
```

- masa in polmer krogle: $m = 40\,\text{kg}$, $a = 0.21\,\text{m}$



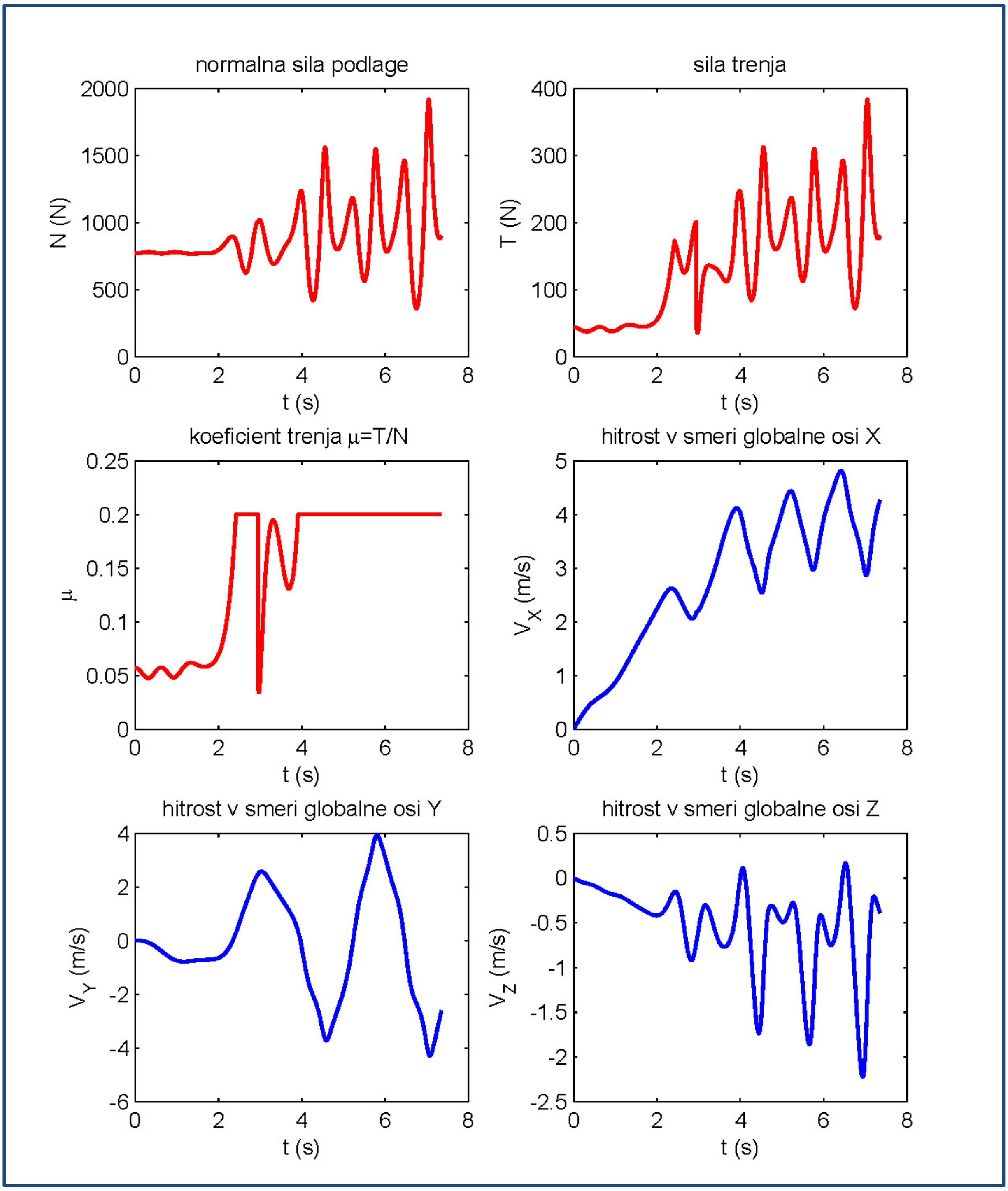
Slika 15: Reakcijske sile podlage, koeficient trenja in težiščne hitrosti krogle z maso 40 kg.

- masa in polmer krogle: $m = 60\,\text{kg}$, $a = 0.24\,\text{m}$



Slika 16: Reakcijske sile podlage, koeficient trenja in težiščne hitrosti krogle z maso 60 kg.

- masa in polmer krogle: $m = 80\,\text{kg}$, $a = 0.27\,\text{m}$



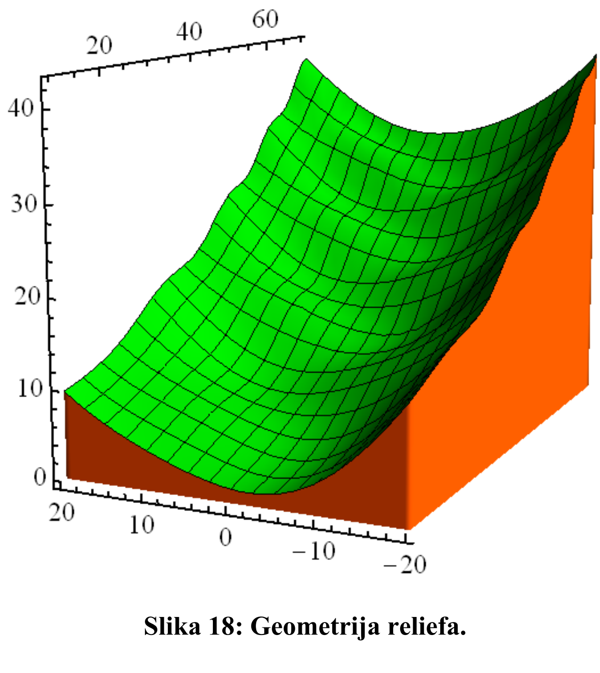
Slika 17: Reakcijske sile podlage, koeficient trenja in težiščne hitrosti krogle z maso 80 kg.

Gibanje krogle je v vseh treh primerih podobno. Nekaj časa se kotali brez podrsavanja, nato s podrsavanjem, taki fazi pa se med kotaljenjem še nekajkrat zamenjata. Čas potovanja krogle od vrha do vznožja tobogana v vseh primerih znaša približno $7\,\mathrm{s}$. Maksimalne sile v smeri normale na površino tobogana so približno dvakrat večje od sile teže krogle. Rezultanta končnih hitrosti pa je v vseh treh primerih podobna, znaša približno $4\,\mathrm{m/s}$.

6.3 Kotaljenje skalnih gmot po nagnjenem pobočju

Pogost naravni pojav na strmih pobočjih so skalni podori ali pa kotaljenje posameznih skalnih gmot po pobočju navzdol. Ti pojavi lahko ogrožajo človeka in njegovo imetje, zato je pomembno, da znamo izračunati njihov doseg in učinke na relief ali konstrukcije, ki so v območju njihovega gibanja. V našem primeru se osredotočimo na gibanje posameznih skalnih gmot različnih mas in velikosti.

Relief naj bo podan z množico točk v prostoru, ki bi lahko bile rezultat geometerskih meritev, za potrebe primera pa smo si jih izmislili. Točke določajo pobočje v obliki nagnjenega nagubanega žleba, širine $40\,\mathrm{m}$ in dolžine $60\,\mathrm{m}$, koti najnižje in najvišje točke na sredini žleba pa se razlikujeta za $32\,\mathrm{m}$ (slika 18). Točke združimo v ploskev s pomočjo interpolacijskih funkcij iz orodja "Spline Toolbox" v *Matlabu*.



Slika 18: Geometrija reliefa.

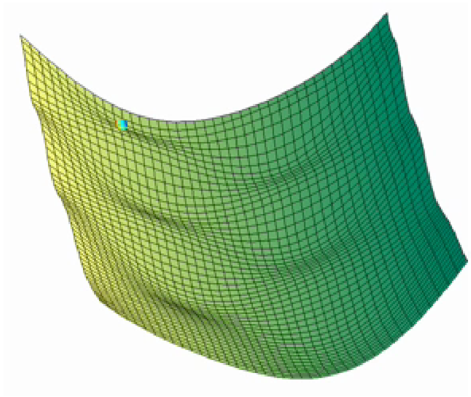
Vrednosti koeficientov trenja sta skozi celoten primer konstantni: $\mu_s = 0.8$, $\mu_d = 0.70$. Vrednosti ustrezata velikosti koeficientov trenja za skalna pobočja: $\mu_s = 0.75 - 0.80$ (Petje in sod., 2006). Skalno gmoto modeliramo s kroglo, pri tem naj se masi ujemata, polmer krogle pa določimo tako, da je gostota krogle enaka $3000\,\mathrm{kg/m^3}$, kar je približna srednja vrednost gostote kamnin zemeljske skorje.

6.3.1 Kotaljenje in poskakovanje

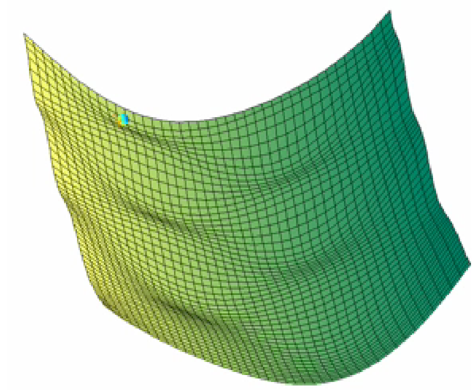
Krogla je med kotaljenjem zaradi svoje gladke površine večino časa v stiku s podlago, skalna gmota poljubne oblike pa se po pobočju večinoma kotali tako, da nezvezno prehaja z roba na rob oziroma z robnimi delci potrkuje ob relief. To vrsto gibanja lahko približno modeliramo tudi s kroglo. Namesto začetnih pogojev, ki ustrezajo kotaljenju, izberemo začetne vrednosti za let krogle po zraku, pri tem pa koordinato Z težišča malo dvignemo, tako da krogla ni v stiku s podlago. Če za koeficient trka izberemo vrednost 1, se bo ob vsakokratnem trku krogle z reliefom krogli povrnil višek potencalne energije, ki smo ga dobili z malenkostnim dvigom iz dotikališča. Krogla bo tako po večini trkov ponovno vzletela, trajanje faz leta, ob tem pa tudi razdalje, ki jih bo krogla preletela, pa bodo tako kratke, da ne bodo bistveno vplivale na smer in hitrost gibanja. Realnost te predpostavke je odvisna od dejanske vrednosti koeficienta trka in naklona pobočja. Tako se pri strmih pobočjih lahko zgodi, da poskakovanje telesa ne preide v kotaljenje tudi že pri vrednostih koeficienta trka, ki so manjše od ena. S programom bi lahko opravili tudi analizo tega pojava.

Zgornji premislek utemeljimo na primeru reliefa, ki smo ga opisali v uvodu. Kljub temu, da je precej strm, za koeficient trka izberemo skrajno vrednost 1. Vzemimo kroglo z maso $2800\,\mathrm{kg}$ in s polmerom $0.6\,\mathrm{m}$. Kroglo spustimo s treh različnih točk reliefa in primerjamo sledi, ki jih opiše pri obeh vrstah gibanja ter velikosti težiščnih in kotnih hitrosti. Gibanje opazujemo $5\,\mathrm{s}$.

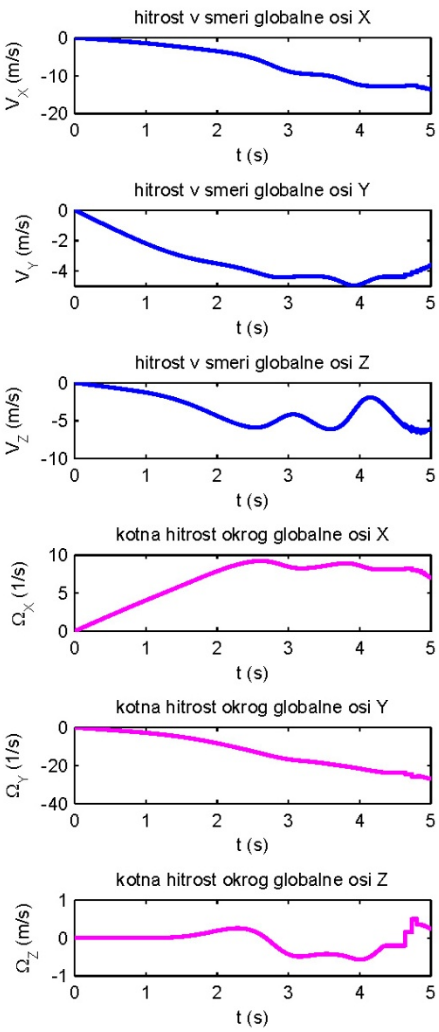
- začetna lega: T1, koordinate: $X = 55\,\mathrm{m}$, $Y = 10\,\mathrm{m}$, $Z = 23.57\,\mathrm{m}$



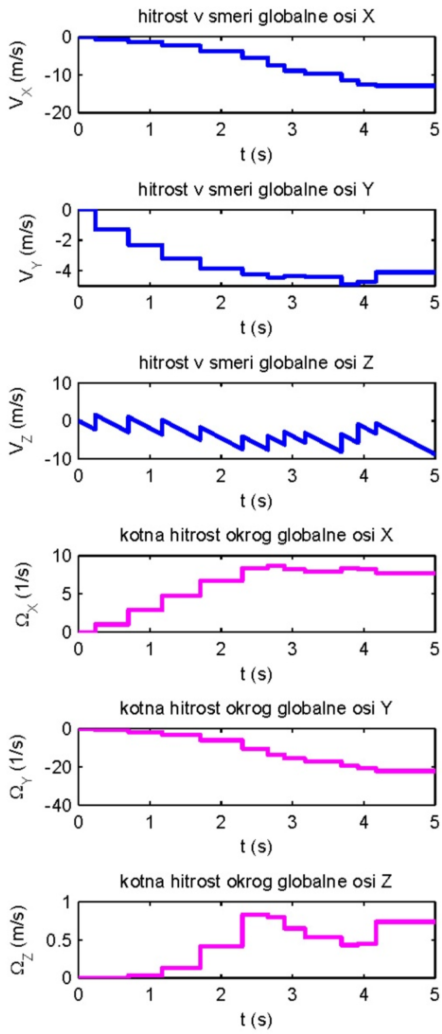
sled krogle pri kotaljenju



sled krogle pri poskakovanju



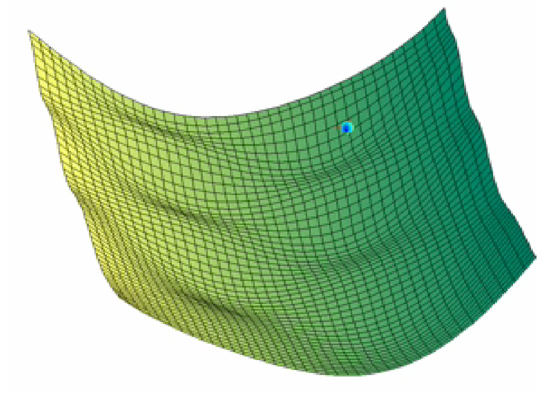
težiščne in kotne hitrosti pri kotaljenju



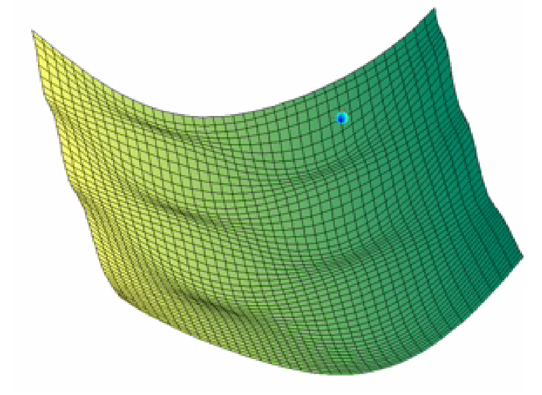
težiščne in kotne hitrosti pri poskakovanju

Slika 19: Začetna točka T1. Primerjava sledi in hitrosti pri kotaljenju in poskakovanju.

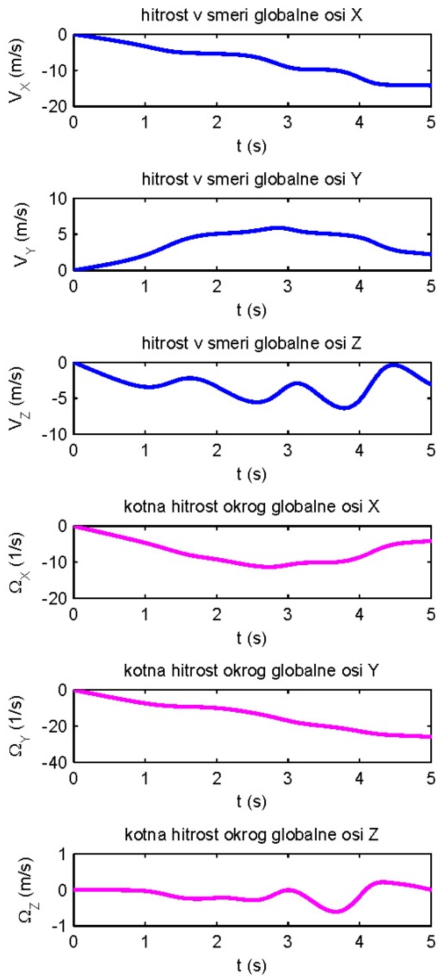
- začetna lega: T2, koordinate: $X = 55\,\mathrm{m}$, $Y = -10\,\mathrm{m}$, $Z = 22.68\,\mathrm{m}$



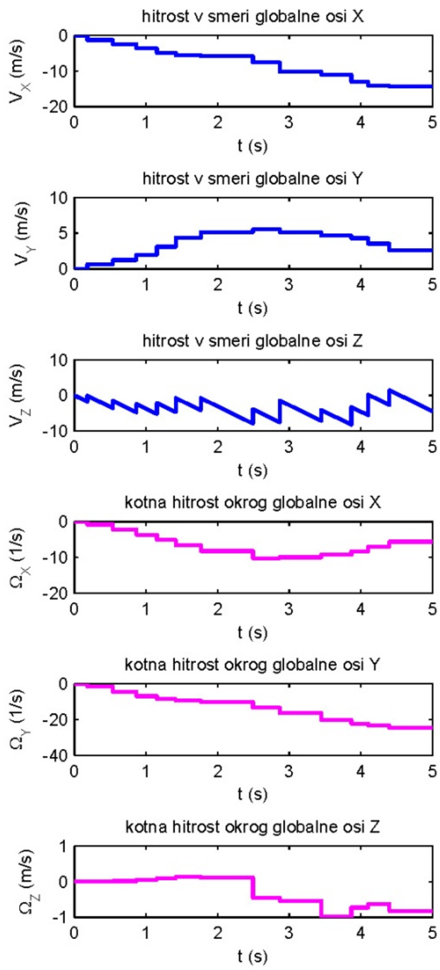
sled krogle pri kotaljenju



sled krogle pri poskakovanju



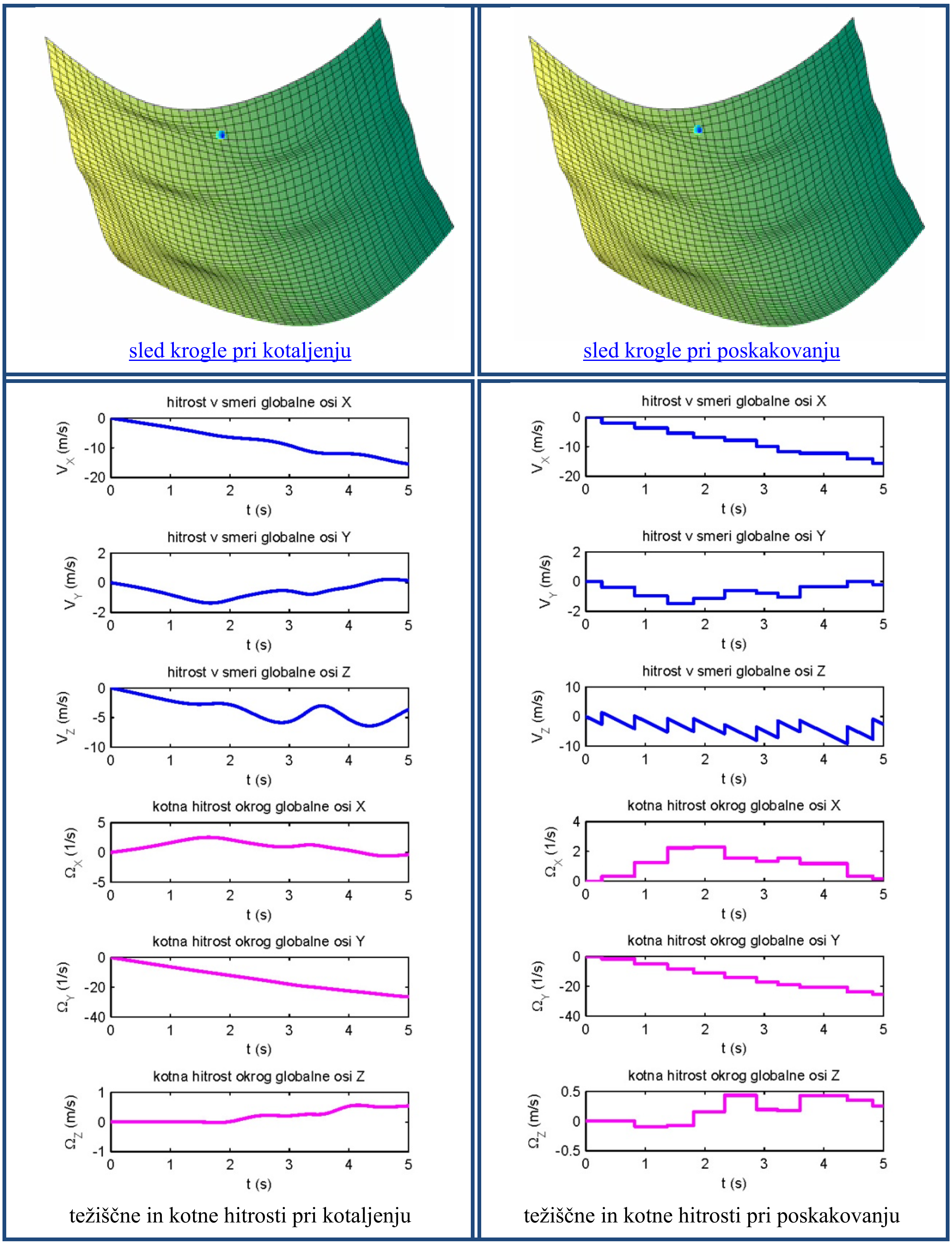
težiščne in kotne hitrosti pri kotaljenju



težiščne in kotne hitrosti pri poskakovanju

Slika 20: Začetna točka T2. Primerjava sledi in hitrosti pri kotaljenju in poskakovanju.

- začetna lega: T3, koordinate: $X = 55\,\text{m}$, $Y = 0\,\text{m}$, $Z = 20.63\,\text{m}$



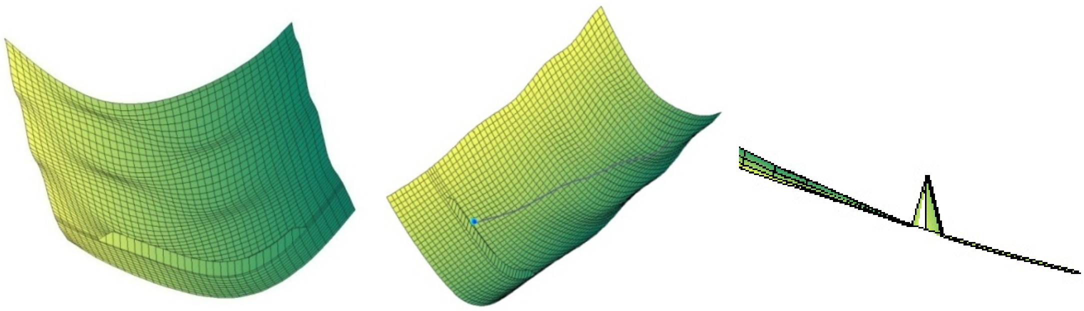
Slika 21: Začetna točka T3. Primerjava sledi in hitrosti pri kotaljenju in poskakovanju.

Primerjava potekov sledi ter velikosti težiščnih in kotnih hitrosti lepo pokaže, da se gibanje krogle pri izmenjavanju kratkih faz leta in trka bistveno ne razlikuje od kotaljenja krogle po podlagi. To lepo lastnost koristno uporabimo že v naslednjem primeru.

6.3.2 Ukrepi za zaščito pred vplivi gibajočih se skalnih gmot

Iz primerov v 6.3.1 je razvidno, da telesa, ki se nenadno sprožijo iz mirovanja, že po nekaj sekundah kotaljenja po strmem pobočju dosežejo velike hitrosti, kar lahko, ob masi, ki jo imajo, predstavlja veliko nevarnost za ljudi in njihovo imetje ob vznožju pobočja, ki ga obravnavamo. Z matematičnim orodjem, ki smo ga pripravili, lahko napravimo študije ukrepov za zaščito pred temi vplivi.

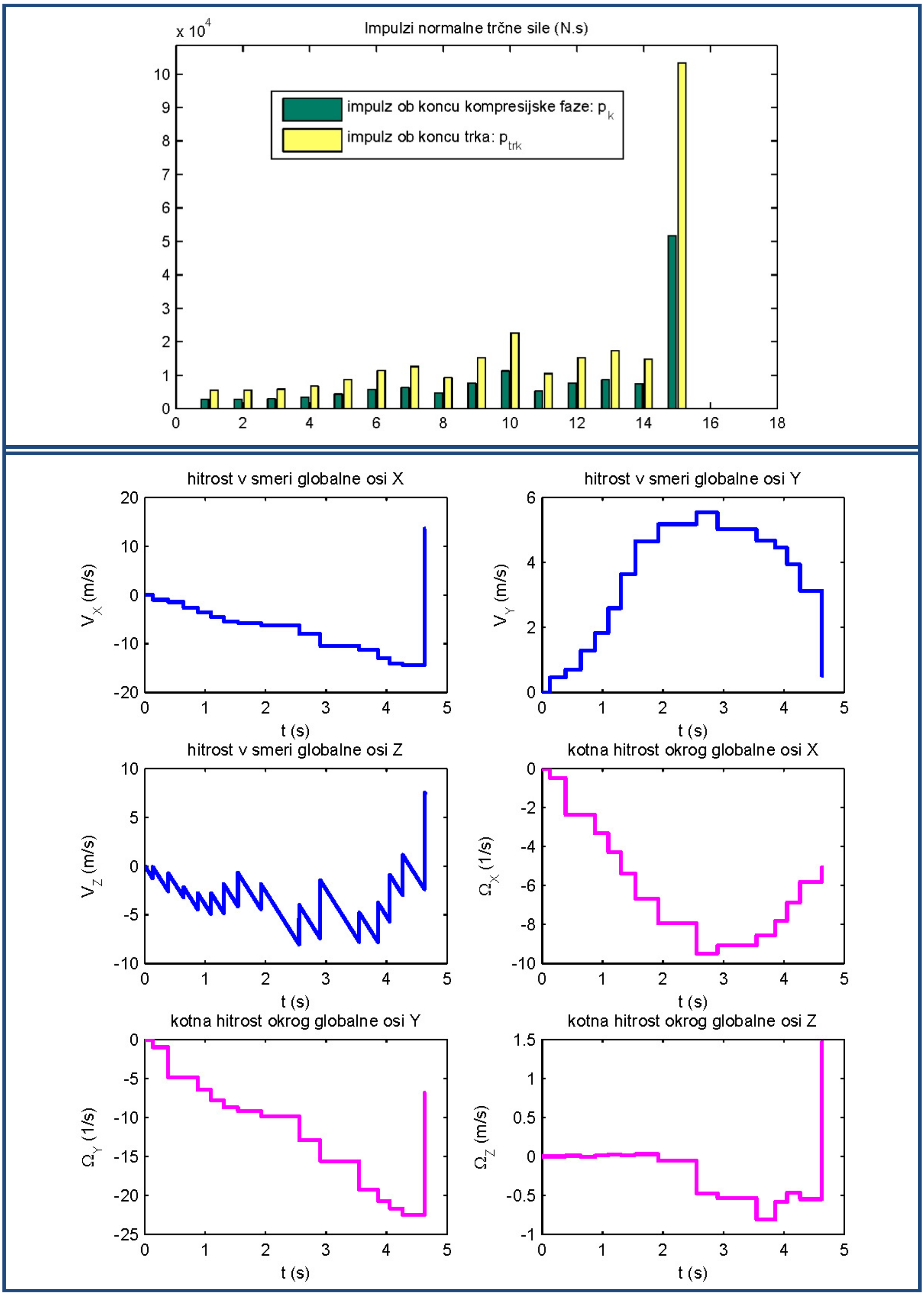
Eden od možnih ukrepov je, da ob vznožju pobočja zgradimo oviro, ki mora biti dovolj visoka in trdna, da zadrži skalne gmote, ki priletijo vanjo. Posebej lahko študiramo vpliv oblike zaščitne ovire na gibanje teles po trku; prava oblika ovire je zelo pomembna, saj lahko sicer gibajoče se telo oviro po trku preskoči in nadaljuje z gibanjem v zaledju. Obravnavamo primer, ko ob vznožju (vzdolž koordinate $Y = 10\,\mathrm{m}$) zgradimo $1.5\,\mathrm{m}$ visoko steno z navpičnim robom na pobočni strani (slika 22).



Slika 22: Dolinska ovira.

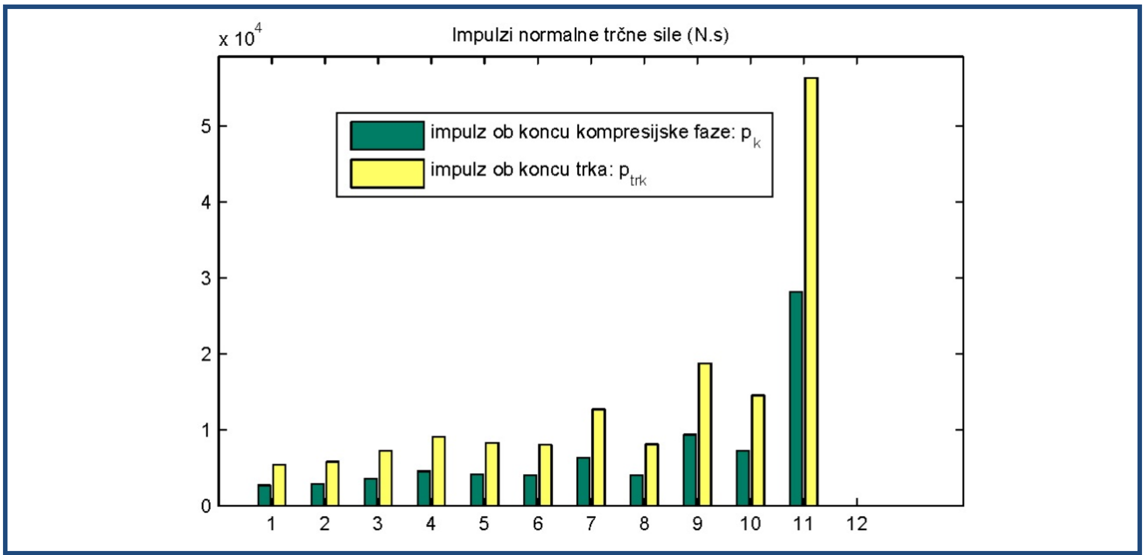
Opazujmo učinke skalnih gmot različnih mas in velikosti, ki jih sprožimo s točke T2 ($X = 55\,\mathrm{m}$, $Y = -10\,\mathrm{m}$, $Z = 22.68\,\mathrm{m}$). Računa trčnih sil in trajanja trka pri modeliranju trka nismo zajeli, tako da nam informacijo o učinkih trčnih sil dajejo velikosti impulzov teh sil, predvsem velikost impulza normalne sile. Zanimajo pa nas tudi težiščne in kotne hitrosti teles med gibanjem.

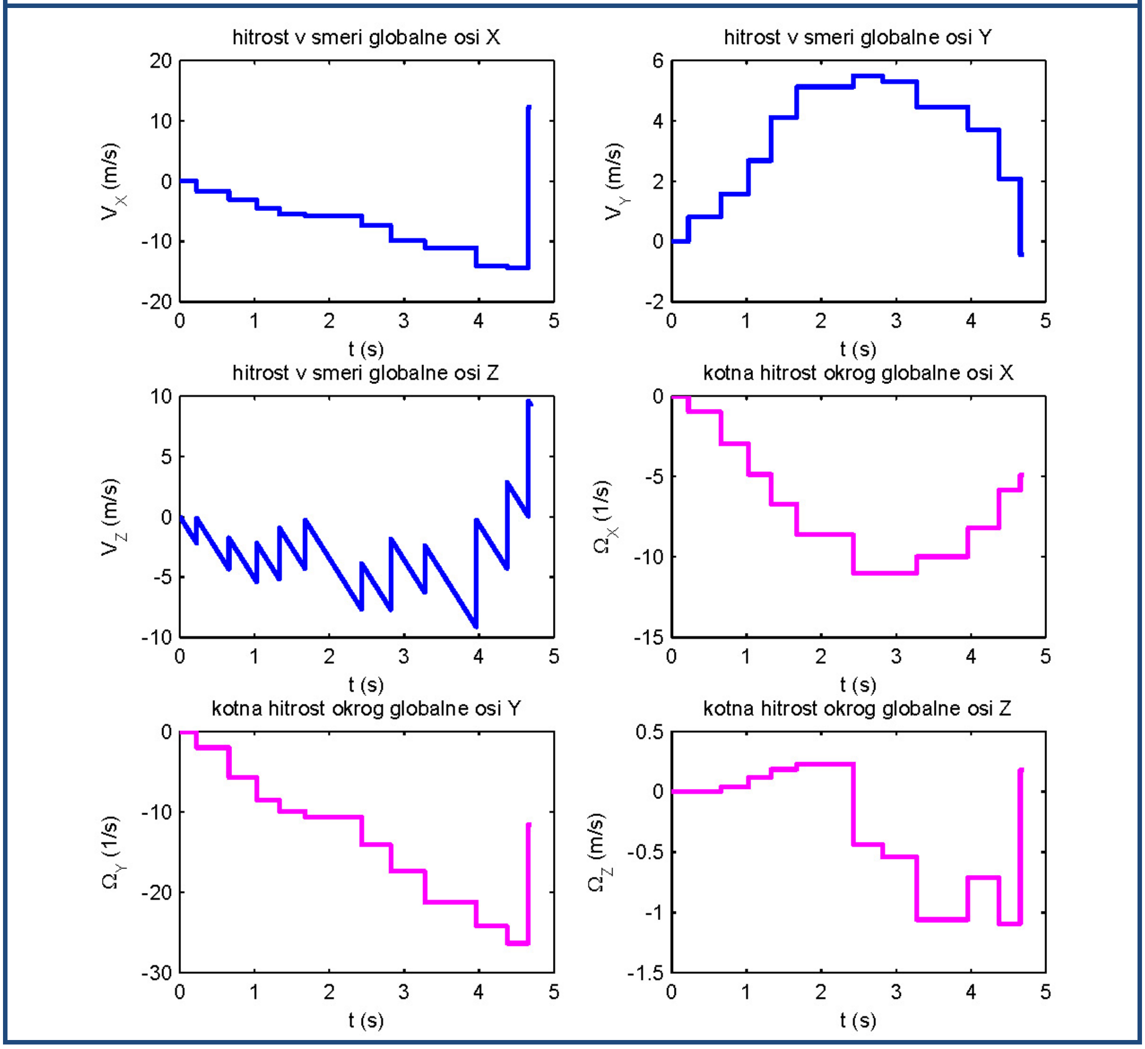
- masa in polmer krogle: $m = 3500\,\text{kg}$, $a = 0.65\,\text{m}$



Slika 23: Krogla z maso 3500 kg. Impulzi normalne sile podlage, težiščne in kotne hitrosti ob trku z oviro.

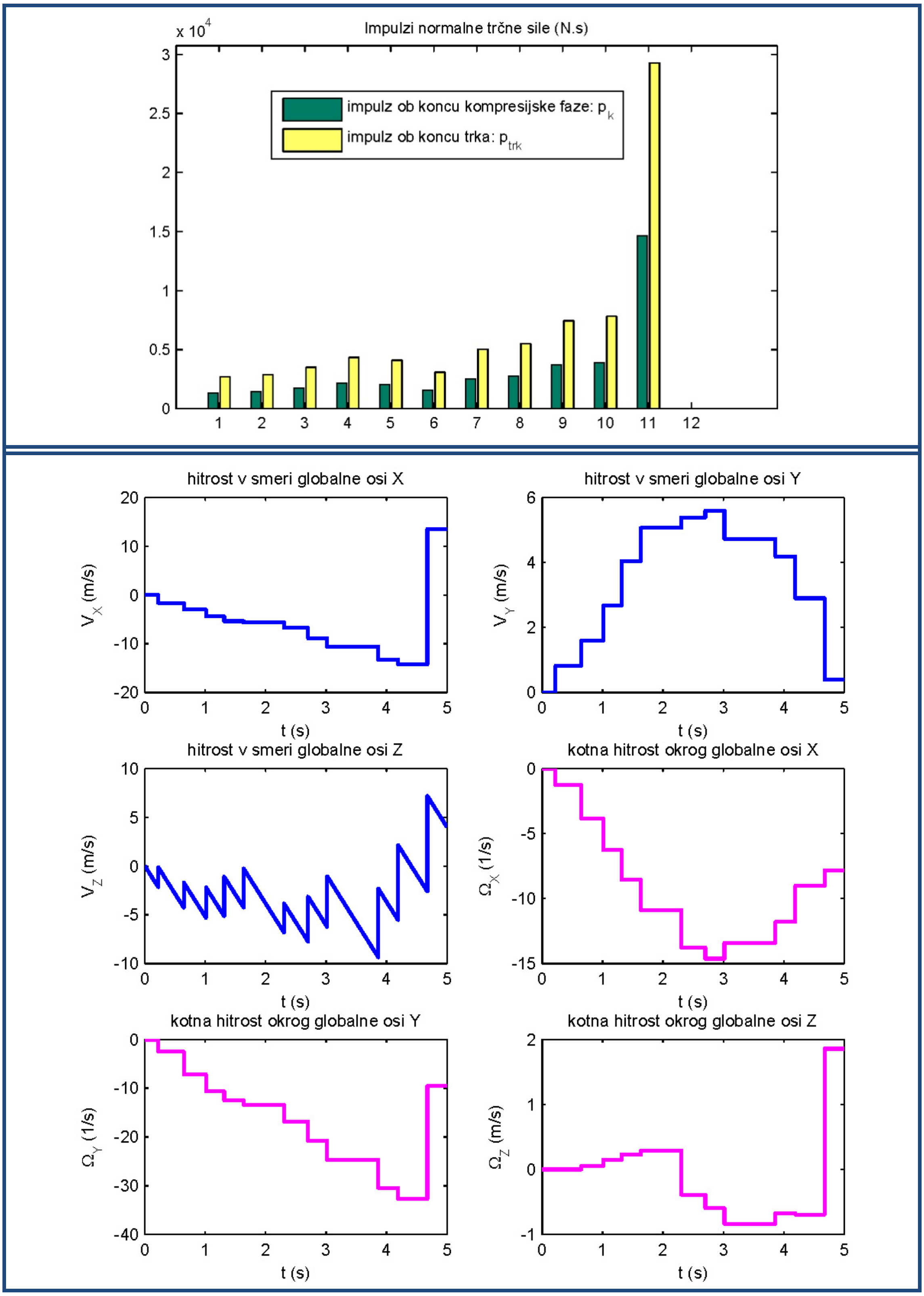
- masa in polmer krogle: $m = 2000\,\mathrm{kg}$, $a = 0.55\,\mathrm{m}$





Slika 24: Krogla z maso 2000 kg. Impulzi normalne sile podlage, težiščne in kotne hitrosti ob trku z oviro.

- masa in polmer krogle: $m = 1000\,\text{kg}$, $a = 0.43\text{m}$



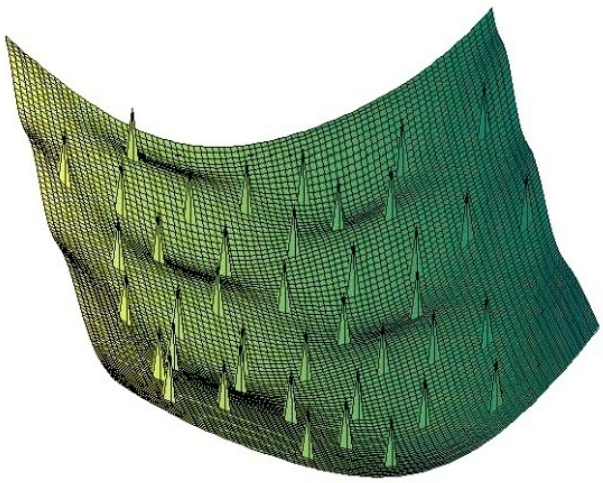
Slika 25: Krogla z maso 1000 kg. Impulzi normalne sile podlage, težiščne in kotne hitrosti ob trku z oviro.

Časi gibanja do trenutka, ko krogla trči v oviro, so v vseh treh primerih podobni in znašajo približno 4.7s. Velikosti impulzov v trenutku trka z oviro so vrednosti v zadnjih stolpcih. Ker smo kotaljenje telesa obravnavali kot serijo trkov in koeficientu trka dali vrednost 1, je tudi impulz ob koncu trka z oviro dvakrat večji, kot je njegova velikost ob koncu kompresijske faze trka. Vrednosti impulza ob koncu trka za primer neelastičnega trka ($0<e<1$), do katerega v resnici pride pri trku z oviro, pa znamo izračunati s pomočjo velikosti kompresijskega impulza: $p_{trk}=p_k(1+e)$. Podobno lahko za manjše vrednosti koeficienta trka določimo velikosti težiščnih in kotnih hitrosti po koncu trka. Iz vrednosti težiščnih in kotnih hitrosti lahko izračunamo kinetično energijo telesa pred in po trku, razlika obeh vrednosti pa je ravno velikost energije, ki se je sprostila ob trku.

6.3.3 Vpliv vegetacije na gibanje skalnih gmot

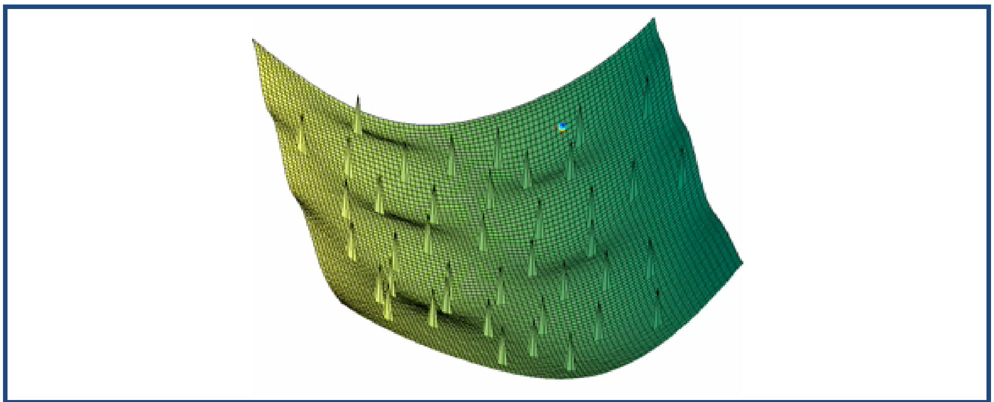
Gibanje skalnih gmot po pobočju, poraslem z drevesi, je lahko precej različno od gibanja po golih površinah. S trki ob drevesa se spreminja tir gibanja in porablja energija kotaljenja. S pripravljenim modelom se lahko lotimo tudi približne ocene gibanja skalnih gmot po poraslem pobočju.

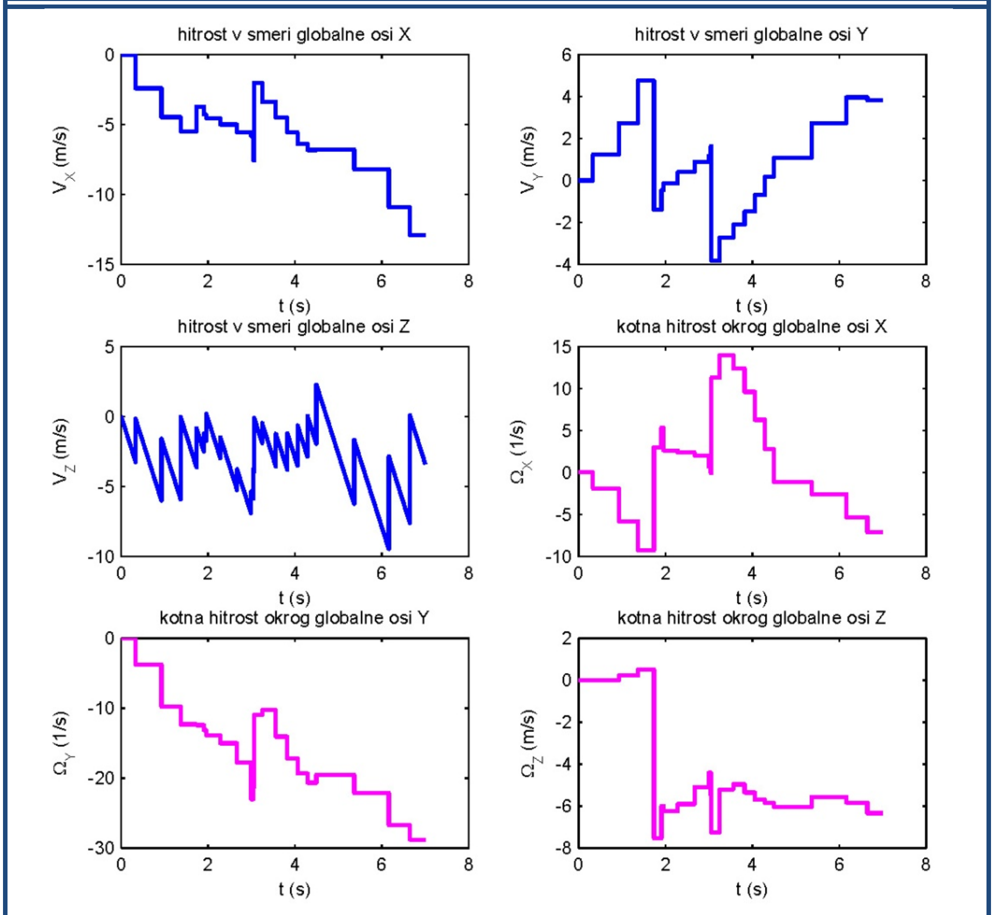
Lego dreves si v tem računskem primeru izmislimo. V program jih podamo tako, da točke reliefa kjer stojijo drevesa, dvignemo z osnovne lege za višino dreves (za vsa drevesa predpostavimo, da so visoka 4m). Relief, ki ga dobimo z interpolacijo, je prikazan na sliki 26.



Slika 26: Pobočje poraslo z drevesi.

Gibanje skalnih gmot po terenu zopet poenostavimo v poskakovanje krogle. Vpliv deformabilnosti dreves upoštevamo tako, da trke krogle z drevesi ločimo od trkov s podlago tako, da jim pripišemo manjši koeficient trka in sicer $e = 0.2$. Vzemimo kroglo z maso $1000\,\mathrm{kg}$ in polmerom $0.43\,\mathrm{m}$, ki z gibanjem začne v točki T2 ($X = 55\,\mathrm{m}$, $Y = -10\,\mathrm{m}$, $Z = 22.68\,\mathrm{m}$). Opazujemo sled, ki jo krogla opiše med gibanjem ter težiščne in kotne hitrosti. Posebej nas zanima velikost opazovanih količin v trenutku, ko krogla doseže območje, na katerega smo v primeru 6.3.2 postavili zaščitno oviro.





Slika 27: Sled krogle, težiščne in kotne hitrosti pri gibanju na poraslem pobočju.

Pri trkih z drevesi se smer gibanja krogle močno spremeni, zato je tudi sled precej različna od tiste po golem pobočju (slika 20). Hitrosti krogle, ko se prikotali do vznožja pobočja, so podobne kot pri kotaljenju iste krogle na golem pobočju (slika 25). Razlog je v majhnem številu trkov z drevesi, ki krogli odvzamejo malo energije. Večji vpliv poraščenosti reliefa bi prišel do izraza ob gostejšem rastru dreves.

7 ZAKLJUČEK

Vplivi, s katerimi gibajoča se telesa učinkujejo na konstrukcije, so v veliki večini primerov nepredvidljivi. Preizkusi, s katerimi bi naredili študijo teh vplivov v realnem okolju, so ponavadi tehnično in cenovno zahtevni, če želimo dobre rezultate pa moramo enak preizkus tudi večkrat ponoviti. Zato je logično, da se naloge lotimo matematično, tako da izpeljemo sistem enačb, ki opisujejo problem in naredimo računalniški program, ki enačbe numerično rešuje ter s tem simulira naravni pojav. S takim orodjem je omogočena analiza vplivov gibajočih se teles na konstrukcije in sistematičen študij vplivov parametrov, ki vodijo gibanje.

Izdelava matematičnega modela gibanja teles po poljubni konstrukciji ali reliefu je bil tudi osnovni namen naše naloge. V modelu smo se omejili na gibanje toge krogle po poljubno oblikovani togi podlagi. Izpeljane so bile enačbe kotaljenja brez podrsavanja, enačbe kotaljenja s podrsavanjem, enačbe leta po zraku in enačbe trka s podlago, nato pa je bil v programskem okolju *Matlab* izdelan program, ki enačbe rešuje in rezultate prikaže v obliki grafov in animacij.

Kljub določenim poenostavitvam v modelu so rezultati numeričnih izračunov smiselni tako v kvantitativnem kot v kvalitativnem pogledu. Pokazali smo primera gibanja skalnih gmot po naravnih pobočjih in gibanja teles po vodnih toboganih.

VIRI

Saje, M. 1994. Kinematika in dinamika. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 418 str.

Saje, M., Zupan, D. 2000. Kotaljenje toge ploščice po hrapavi vodoravni ravnini. V: ŠKERGET, Leopold (ur.). Kuhljevi dnevi 2000, Maribor, 21.-22. september 2000. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: str. 183-190, ilustr.

Saje, M., Zupan, D. 2002. Kotaljenje toge ploščice po togi hrapavi ravnini : vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. D. 1, Osnove. V: ŠKERGET, Leopold (ur.), MARN, Jure (ur.). Kuhljevi dnevi '02, Ribno pri Bledu, 26.-27. september 2002. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: str. 1-8.

Zupan, D., Saje, M. 2002. Kotaljenje toge ploščice po togi hrapavi ravnini : vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. D. 2, Primeri. V: ŠKERGET, Leopold (ur.), MARN, Jure (ur.). Kuhljevi dnevi '02, Ribno pri Bledu, 26.-27. september 2002. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: str. 9-16, graf. prikazi.

Saje, M., Zupan, D. 2006. The rattling of Euler's disk. Multidiscipline modeling in materials and structures, letn. 2, št. 1: str. 49-66, graf. prikazi.

Petje, U., Mikoš, M., Majes, B. 2006. Gibanje skalnih gmot po pobočjih. Geologija. 49, 2: 393-408.

Križanič, F. 1991. Navadne diferencialne enačbe. Variacijski račun. Parcialne diferencialne enačbe. 2 natis. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije: 196 str.

Saje, M. 1999. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 1. del: Osnovne enačbe. http://www.km.fgg.uni-lj.si/Predmeti/KiD/KD.htm (dostopno 1999-2005), 81 str.

Zupan, D. 2000. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 2. del: Numerično reševanje enačb. http://www.km.fgg.uni-lj.si/Predmeti/KiD/KD.htm (dostopno 2000-2005), 61 str.

Saje, M. 2000. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 3. del: Stabilnost ravnotežnih točk. http://www.km.fgg.uni-lj.si/Predmeti/KiD/KD.htm (dostopno 2000-2005), 63 str.

Saje, M., Zupan, D. 2001. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 4. del: Vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. http://www.km.fgg.uni-lj.si/Predmeti/KiD/KD.htm (dostopno 2001-2005), 90 str.

Saje, M., Zupan, D. 2002. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 5. del: Let po zraku in trk s podlago. http://www.km.fgg.uni-lj.si/Predmeti/KiD/KD.htm (dostopno 2002-2005), 29 str.

PRILOGE

PRILOGA A: ALGORITEM ZAČETNEGA DELA PROGRAMA V MATLABU

% Najprej preverimo vrsto gibanja ob začetku.
% Če smo v vektor začetnih pogojev podali 9 vrednosti, začnemo z enačbami leta;

% pripravimo začetne vrednosti za let kroglice – stolpec `x0`:

`x0=[c(1),c(2),c(3),c(4),c(5),c(6),0,`$\pi/2$`,0,c(7),c(8),c(9)]';`

% rešujemo enačbe leta kroglice:

```
[t,x]=ode45('let_ode',[],[],[],data,x0,T,z,W);
```

% let se konča s trkom ob podlago. Pripravimo začetne pogoje za začetek analize trka. Vzamemo zadnji rezultat leta, težiščne in kotne hitrosti transformiramo iz globalnega v izbrani koordinatni sistem in zapišemo v vektor `k_trk`.

% Pokličemo funkcijo, ki analizira gibanje kroglice med trkom:

$[v_{x,trk}, v_{y,trk}, v_{z,trk}, \Omega_{x,trk}, \Omega_{y,trk}, \Omega_{z,trk}, v_{B,trk}, \alpha_{trk}, p^*, p_k, p_{trk}]$`=trk(data,k_trk,z);`

% ob koncu trka preverimo vrsto gibanja v nadaljevanju:

% če je $v_{z,trk} < 10^{-4}$, sledi kotaljenje po ploskvi;

% če je $v_{B,trk} = 0$, se lahko začne kotaljenje brez podrsavanja:

% najprej preverimo, če je izpolnjen dodatni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja. Vzamemo vrednosti spremenljivk ob koncu trka in jih zapišemo v vektor `k`. Izračunamo reakcije in razmerje ν z enačbami za kotaljenje brez podrsavanja.

$[\nu, R_x, R_y, R_z]$`=trenje_brez_podrsavanja(k,data,z,W);`

% če je $\nu < \mu_s$ `(z(2))`, sledi kotaljenje brez podrsavanja:

% zadnjemu rezultatu leta dodamo vrednosti ob koncu trka; to so začetne vrednosti za kotaljenje brez podrsavanja;

```
ind=2;
```

% sicer ($\nu \geq \mu_s$) pa, kljub $v_{B,trk} = 0$, sledi kotaljenje s podrsavanjem:

% zadnjemu rezultatu leta dodamo vrednosti ob koncu trka; to so začetne vrednosti kotaljenja s podrsavanjem; posebej moramo podati 6. in 7. komponento začetnih vrednosti:

`x(length(t),6)=`10^{-8}`;` % majhna motnja na začetku podrsavanja

x(length(t),7)= α_{trk};
ind=3;
% konec
% sicer ($v_{B,trk} \neq 0$) pa kotaljenje s podrsavanjem:
% zadnjemu rezultatu leta dodamo vrednosti ob koncu trka; to so začetne vrednosti za kotaljenje s podrsavanjem; posebej pazimo na 6. in 7. komponento:
x(length(t),6)= $v_{B,trk}$;
x(length(t),7)= α_{trk};
ind=3;
% konec
% sicer ($v_{z,trk} \geq 10^{-4}$) pa let po zraku:
% vrednosti težiščnih in kotnih hitrosti ob koncu trka transformiramo v globalni koordinatni sistem; skupaj z ostalimi vrednostmi spremenljivk, ki jih poznamo kot zadnji rezultat leta, sestavljajo vektor začetnih vrednosti za novo fazo leta.
ind=1;
% konec

% če pa je bilo začetnih vrednosti 7, začnemo z enačbami kotaljenja:
% v odvisnosti od začetne lege dotikališčne točke (c(1), c(2)) določimo začetne vrednosti koordinat težišča ter kotov Ψ in Θ.
[X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, Ψ^0, Θ^0]=zacetne_vrednosti_kotaljenja(c(1),c(2),data(2));

% če sta vrednosti c(6) in c(7) v vektorju začetnih pogojev enaki nič, se kroglica v začetku lahko kotali brez podrsavanja;
% v stolpec x0 zapišemo začetne pogoje za kotaljenje brez podrsavanja:
x0(1) = X_T^0;
x0(2) = Y_T^0;
x0(3) = Z_T^0;
x0(4) = Ψ^0;
x0(5) = Θ^0;
x0(6) = data(2)*c(4); % zadostimo vezni enačbi $v_x^0 = \text{a}\,\Omega_y^0$
x0(7) = -data(2)*c(3); % zadostimo vezni enačbi $v_y^0 = -\text{a}\,\Omega_x^0$
x0(8) = 0; % zadostimo vezni enačbi $v_z^0 = 0$
x0(9) = 0;
x0(10) = $\pi/2$;
x0(11) = 0;
x0(12) = c(3);

`x0(13)=c(4);`
`x0(14)=c(5);`

`%` preverimo dodatni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja. Izračunamo reakcije in razmerje ν z enačbami za kotaljenje brez podsavanja.

`[`ν, R_x, R_y, R_z`]=trenje_brez_podrsavanja(x0,data,z,W);`

`%` če je $\nu < \mu_s$ `(z(2))`, sledi kotaljenje brez podrsavanja

`%` rešujemo enačbe kotaljenja brez podrsavanja

```
[t,x]=ode23t('kotaljenje_ode_b',[],[],[],data,x0,T,z,W);
```

`%` kotaljenje brez podrsavanja se konča s prehodom v kotaljenje s podrsavanjem ali pa z odlepitvijo od podlage. Preverimo obe možnosti in predpišemo ustrezen indeks za nadaljnje gibanje.

`%` Vzamemo zadnji rezultat kotaljenja brez podrsavanja – vektor `k` ter izračunamo komponento R_z reakcije podlage:

`[`ν, R_x, R_y, R_z`]=trenje_brez_podrsavanja(k,data,z,W);`

`%` če je $R_z \leq 0$, je prišlo do odlepitve kroglice od podlage;

`%` vzamemo zadnji rezultat kotaljenja, nato težiščne in kotne hitrosti transformiramo v globalni koordinatni sistem; to so začetne vrednosti za let po zraku;

`ind=1;`

`%` sicer ($R_z > 0$) pa se začne kotaljenje s podrsavanjem;

`%` vzamemo zadnji rezultat kotaljenja brez podrsavanja, izračunamo kot delovanja sile trenja α ter ustrezno spremenimo 6. in 7. komponento; to so začetne vrednosti za kotaljenje s podrsavanjem:

`x(length(t),6)=`10^{-8}`;` `%` majhna motnja na začetku podrsavanja

`x(length(t),7)=`α`;`

`ind=3;`

`%` konec

`%` sicer ($\nu \geq \mu_s$) pa, kljub $v_B{}^0 = 0$, sledi kotaljenje s podrsavanjem;

`%` določimo začetni kot delovanja sile trenja α^0;

`%` popravimo 6. in 7. komponento začetnih pogojev:

`x0(6)=`10^{-8}`;` `%` majhna motnja $v_B{}^0$ na začetku podrsavanja

`x0(7)=`α^0`;`

`%` rešujemo enačbe kotaljenja s podrsavanjem

```
[t,x]=ode23t('kotaljenje_ode_s',[],[],[],data,x0,T,z,W);
```

% kotaljenje s podrsavanjem se konča s prehodom v kotaljenje brez podrsavanja ali pa z odlepitvijo od podlage. Preverimo obe možnosti in predpišemo ustrezen indeks za nadaljnje gibanje.

% Vzamemo zadnji rezultat kotaljenja s podrsavanjem – vektor `k` ter izračunamo komponento R_z reakcije podlage:

R_z = `trenje_s_podrsavanjem(k,data,z,W)`

% če je $R_z \leq 0$, je prišlo do odlepitve kroglice od podlage

% vzamemo zadnji rezultat kotaljenja, nato težiščne in kotne hitrosti transformiramo v globalni koordinatni sistem; to so začetne vrednosti za let po zraku;

`ind=1;`

% sicer ($R_z > 0$) pa je kroglica prenehala podrsavati

% vzamemo zadnji rezultat kotaljenja s podrsavanjem ter ustrezno spremenimo 6. in 7. komponento; to so začetne vrednosti za kotaljenje brez podrsavanja:

```
x(length(t),6)=data(2)*k(13);
x(length(t),7)=-data(2)*k(12);
ind=2;
```

% konec

% konec

% sicer (`c(6)` $\neq 0$) pa smo že na začetku predpostavili podrsavanje

% nastavimo začetne pogoje za kotaljenje s podrsavanjem

`x0(1)` $= X_T^0$;

`x0(2)` $= Y_T^0$;

`x0(3)` $= Z_T^0$;

`x0(4)` $= \Psi^0$;

`x0(5)` $= \Theta^0$;

`x0(6)=c(6);`

`x0(7)=c(7);`

`x0(8)=0;` % zadostimo vezni enačbi $v_z^0 = 0$

`x0(9)=0;`

`x0(10)` $= \pi/2$;

`x0(11)=0;`

`x0(12)=c(3);`

`x0(13)=c(4);`

`x0(14)=c(5);`

% rešujemo enačbe kotaljenja s podrsavanjem

```
[t,x]=ode23t('kotaljenje_ode_s',[],[],[],data,x0,T,z,W);
```

% kotaljenje s podrsavanjem se konča s prehodom v kotaljenje brez podrsavanja ali pa z odlepitvijo od podlage. Preverimo obe možnosti in predpišemo ustrezen indeks za nadaljnje gibanje. Vzamemo zadnji rezultat kotaljenja s podrsavanjem – vektor `k` ter izračunamo komponento R_z reakcije podlage:

R_z = `trenje_s_podrsavanjem(k,data,z,W)`

% če je $R_z \leq 0$, je prišlo do odlepitve kroglice od podlage

% vzamemo zadnji rezultat kotaljenja, nato težiščne in kotne hitrosti transformiramo v globalni koordinatni sistem; to so začetne vrednosti za let po zraku:

```
ind=1;
```

% sicer ($R_z > 0$) pa je kroglica prenehala podrsavati

% vzamemo zadnji rezultat kotaljenja s podrsavanjem ter ustrezno spremenimo 6. in 7. komponento; to so začetne vrednosti za kotaljenje brez podrsavanja:

```
x(length(t),6)=data(2)*k(13);
x(length(t),7)=-data(2)*k(12);
ind=2;
```

% konec

% konec

% konec

V nadaljevanju ponavljamo zgornji algoritem do izbranega končnega časa (`T(2)`). Informacijo o vrsti gibanja nam tu, za razliko od zgornjega algoritma, kjer so to bili začetni pogoji, daje indeks `ind`.

% Dokler je dolžina vektorja `t`, v katerega združujemo trajanje posameznih faz, manjša od `T(2)`, izvajamo spodnjo zanko:

% Če je `ind` = 1, kroglica leti

% Vzamemo zadnji rezultat prejšnje faze gibanja – vektor `k_let` kot začetne vrednosti za analizo leta. Vrednosti smo v obliko, primerno za analizo leta, zapisali že ob koncu prejšnje faze, ko smo določili indeks naslednje faze.

% Od skupnega časa `T(2)` odštejemo skupno trajanje dosedanjih faz `t`. Podatke o novem časovnem intervalu zapišemo v vektor `Tim`:

```
Tim(1)=T(1);
```

`Tim(2)=T(2)-t(length(t));`

% rešujemo enačbe leta
% `[t,x]=ode45('let_ode',[],[],[],data,k_let,Tim,z,W);`

% let se konča s trkom ob podlago. Pripravimo začetne pogoje za začetek analize trka. Vzamemo zadnji rezultat leta, težiščne in kotne hitrosti transformiramo iz globalnega v izbrani koordinatni sistem in zapišemo v vektor `k_trk`.

% pokličemo funkcijo, ki analizira gibanje kroglice med trkom:
[$v_{x,trk}$, $v_{y,trk}$, $v_{z,trk}$, $\Omega_{x,trk}$, $\Omega_{y,trk}$, $\Omega_{z,trk}$, $v_{B,trk}$, α_{trk}, p^*, p_k, p_{trk}]=`trk(data,k_trk,z);`

% ob koncu trka preverimo, s katero vrsto gibanja nadaljujemo:
% če je $v_{z,trk} < 10^{-4}$, sledi kotaljenje po ploskvi
  % če je $v_{B,trk} = 0$, se lahko začne kotaljenje brez podrsavanja,
    % najprej preverimo, če je izpolnjen dodatni pogoj za kotaljenje brez podrsavanja. Vzamemo vrednosti spremenljivk ob koncu trka in jih zapišemo v vektor `k`. Izračunamo reakcije in razmerje ν z enačbami za kotaljenje brez podrsavanja.
    [ν, R_x, R_y, R_z]=`trenje_brez_podrsavanja(k,data,z,W);`
    % če je $\nu < \mu_s$ (`z(2)`), sledi kotaljenje brez podrsavanja:
      % zadnjemu rezultatu leta dodamo vrednosti ob koncu trka; to so začetne vrednosti za kotaljenje brez podrsavanja;
      `ind=2;`
    % sicer ($\nu \geq \mu_s$) pa sledi kotaljenje s podrsavanjem:
      % zadnjemu rezultatu leta dodamo vrednosti ob koncu trka; to so začetne vrednosti kotaljenja s podrsavanjem; posebej moramo podati 6. in 7. komponento začetnih vrednosti:
      `x(length(t),6)=`10^{-8}`;` % motnja na začetku podrsavanja
      `x(length(t),7)=`α_{trk}`;`
      `ind=3;`
    % konec
  % sicer ($v_{B,trk} \neq 0$) pa kotaljenje s podrsavanjem:
    % zadnjemu rezultatu leta dodamo vrednosti ob koncu trka; to so začetne vrednosti za kotaljenje s podrsavanjem; posebej pazimo na 6. in 7. komponento:
    `x(length(t),6)=`$v_{B,trk}$`;`
    `x(length(t),7)=`α_{trk}`;`

```
        ind=3;
```
    % konec
  % sicer ($v_{z,trk} \geq 10^{-4}$) pa let po zraku
    % vrednosti težiščnih in kotnih hitrosti ob koncu trka transformiramo v globalni koordinatni sistem; skupaj z ostalimi vrednostmi spremenljivk, ki jih poznamo kot zadnji rezultat leta, sestavljajo vektor začetnih vrednosti za novo fazo leta.
```
    ind=1;
```
  % konec

% Če je `ind` = 2, se kroglica kotali brez podrsavanja
  % vzamemo zadnji rezultat prejšnje faze – vektor `k_b`,
  % nastavimo nov časovni interval
```
  Tim(1)=T(1);
  Tim(2)=T(2)-t(length(t));
```

  % rešujemo enačbe kotaljenja brez podrsavanja
```
  [t,x]=ode23t('kotaljenje_ode_b',[],[],[],data,k_b,Tim,z,W);
```

  % kotaljenje brez podrsavanja se konča s prehodom v kotaljenje s podrsavanjem ali pa z odlepitvijo od podlage. Preverimo obe možnosti in predpišemo ustrezen indeks za nadaljnje gibanje.
  % Vzamemo zadnji rezultat kotaljenja brez podrsavanja – vektor `k` ter izračunamo komponento R_z reakcije podlage:
  [ν,R_x,R_y,R_z]=`trenje_brez_podrsavanja(k,data,z,W);`
  % če je $R_z \leq 0$, je prišlo do odlepitve kroglice od podlage
    % vzamemo zadnji rezultat kotaljenja, nato težiščne in kotne hitrosti transformiramo v globalni koordinatni sistem; to so začetne vrednosti za let po zraku;
```
    ind=1;
```
  % sicer ($R_z > 0$) pa se začne kotaljenje s podrsavanjem
    % vzamemo zadnji rezultat kotaljenja brez podrsavanja, izračunamo kot delovanja sile trenja α ter ustrezno spremenimo 6. in 7. komponento; to so začetne vrednosti za kotaljenje s podrsavanjem:
    `x(length(t),6)=`10^{-8}`;` % majhna motnja na začetku podrsavanja
    `x(length(t),7)=`α`;`
```
    ind=3;
```
  % konec

% Če pa je `ind=3`, se kroglica kotali s podrsavanjem

% vzamemo zadnji rezultat prejšnje faze – vektor `k_s`,

% nastavimo nov časovni interval

```
Tim(1)=T(1);
Tim(2)=T(2)-t(length(t));
```

% rešujemo enačbe kotaljenja s podrsavanjem

```
[t,x]=ode23t('kotaljenje_ode_s',[],[],[],data,k_s,Tim,z,W);
```

% kotaljenje s podrsavanjem se konča s prehodom v kotaljenje brez podrsavanja ali pa z odlepitvijo od podlage. Preverimo obe možnosti in predpišemo ustrezen indeks za nadaljnje gibanje. Vzamemo zadnji rezultat kotaljenja s podrsavanjem – vektor `k` ter izračunamo komponento R_z reakcije podlage:

R_z = `trenje_s_podrsavanjem(k,data,z,W)`

% če je $R_z \leq 0$, se je kroglica odlepila od podlage

% vzamemo zadnji rezultat kotaljenja, nato težiščne in kotne hitrosti transformiramo v globalni koordinatni sistem; to so začetne vrednosti za let po zraku;

```
ind=1;
```

% sicer ($R_z > 0$) pa je kroglica prenehala podrsavati

% vzamemo zadnji rezultat kotaljenja s podrsavanjem ter ustrezno spremenimo 6. in 7. komponento; to so začetne vrednosti za kotaljenje brez podrsavanja:

```
x(length(t),6)=data(2)*k(13);
x(length(t),7)=-data(2)*k(12);
ind=2;
```

% konec

% konec

% konec

PRILOGA B: Animacije gibanj

Animacije primerov, prikazanih v tej nalogi so zbrane na priloženi zgoščenki in spletnem naslovu www.km.fgg.uni-lj.si. Dosegljive so tudi preko povezav ob slikah ali na spletnem naslovu http://www.youtube.com/PeterCesarek, v okviru seznama "Impact of moving bodies on structures" (http://www.youtube.com/view_play_list?p=51D936417E4292D4).