

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Kandidat/-ka:

MATIC KLANČIŠAR

**OBDELAVA KINEMATIČNIH MERITEV S
KALMANOVIM FILTROM**

Magistrsko delo št.:

**PROCESSING KINEMATIC MEASUREMENTS
WITH KALMAN FILTER**

Graduation – Master thesis No.:

Mentor/-ica:

izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič

Predsednik komisije:

Somentor/-ica:

asist. Gašper Štebe

Član komisije:

Ljubljana, 2020

STRAN ZA POPRAVKE, ERRATA**Stran z napako****Vrstica z napako****Namesto****Naj bo**

»Ta stran je namenoma prazna«

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	528.02:681.5.015.44(043.2)
Avtor:	Matic Klančičar
Mentor/mentorica:	izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič
Somentor(ica):	asist. Gašper Štebe, univ. dipl. inž. geod.
Naslov:	Obdelava kinematičnih terestričnih meritev s Kalmanovim filtrom
Tip dokumenta:	Magistrsko delo
Obseg in oprema:	36 str., 8 sl., 11 pregl., 14 graf.,
Ključne besede:	kinematične meritve, Kalmanov filter, hitrost, pospešek, odmik

Izvleček

Magistrska naloga temelji na oceni kakovosti kinematičnih meritev z elektronskim tahimetrom Leica TS30 in njihovi obdelavi s Kalmanovim filtrom. Meritve smo opravili na vozičku komparatorja nivelmanskih lat, kjer se je reflektor premikal enakomerno in pospešeno. Sledila je primerjava rezultatov z referenčno linijo, ki smo jo preračunali na podlagi rezultatov precizne izmere krajnih točk in z izravnano premico, ki smo jo izračunali po metodi najmanjših kvadratov iz merjenih točk. Izračunali smo hitrost ter pospešek gibanja med posameznimi točkami. Rezultate smo obdelali s Kalmanovim filtrom. Primerjali smo pravokotne odmike filtriranih in merjenih točk ter obravnavali odstopanja od referenčne linije in izravnane premice v odvisnosti od koeficienta šuma Kalmanovega filtra.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC: 528.02:681.5.015.44(043.2)

Author: Matic Klančičar

Supervisor: Assoc. Prof. Tomaž Ambrožič, Ph.D.

Co-advisor: Assist. Gašper Štebe, B.Sc.

Title: Processing kinematic measurements with Kalman filter

Document type: Master's thesis

Notes: 36 p., 8 fig., 11 tab., 14 diag.,

Key words: kinematic measurements, Kalman filter, speed, acceleration, deviation

Abstract

The master's thesis is based on an assessment of the quality of the kinematic measurements, with the Leica TS30 electronic tachymeter and their processing with the Kalman's filter. Measurements were recorded to a reflector, on the wheelchair of the leveling staff comparator, where the reflector was moved evenly and accelerated. The next step was the comparison of the results with the reference line, which was calculated on the basis of the results of the precision measurement, of the endpoints. Results were also compared to the adjustment line, which was calculated with least squares method. We calculated the speed and acceleration of movement between points. The results were processed with Kalman's filter. We compared the perpendicular distances of filtered and measured points and discuss deviations from the reference line, depending on the noise coefficient of the Kalman's filter.

ZAHVALA

Za nasvete in strokovno pomoč pri nastajanju magistrske naloge bi se rad zahvalil mentorju, izr. prof. Tomažu Ambrožiču in somentorju, univ. dipl. inž. geod. Gašperju Štebetu.

Zahvala za pomoč gre sošolcem, ki so mi bili v pomoč pri diplomi in tekom študija.

Prav tako se zahvaljujem svoji družini in prijateljem za vsakodnevno podporo v življenju.

Hvala!

KAZALO VSEBINE

1	UVOD.....	1
2	METODA DELA.....	2
2.1	Opis instrumentarija	2
2.1.1	Elektronski tahimeter.....	2
2.1.2	Reflektor in nosilec reflektorja.....	4
2.1.3	Podnožje in stativ	5
2.2	Opis izvedbe izmere	6
3	KALMANOV FILTER	9
3.1	Postopek Kalmanovega filtra	10
3.1.1	Linearna enačba stanja sistema	11
3.1.2	Matrika prehoda stanj in kovariančna matrika šuma	12
3.1.3	Prenos varianc in kovarianc.....	13
3.1.4	Linearna enačba meritev.....	14
3.1.5	Začetni pogoji ali inicializacija filtra.....	15
3.1.6	Kalmanova zanka.....	16
4	ANALIZA REZULTATOV	17
4.1	Analiza meritev.....	17
4.1.1	Določitev referenčne linije	17
4.1.2	Določitev izravnane premice.....	18
4.2	Analiza postopka filtriranja	20
4.2.1	Določitev optimalnih parametrov Kalmanovega filtra.....	20
4.2.2	Položaj in hitrost pri različnih izbirah koeficienta šuma $\sigma\omega$	24
4.2.3	Optimalna izbira koeficienta šuma $\sigma\omega$	36
5	ZAKLJUČEK.....	43
6	VIRI	44

Kazalo slik

Slika 1: Tahimeter Leica TS30 [10]	2
Slika 2: Delovanje senzorjev CMOS [2]	3
Slika 3: Prikaz iskanja reflektorja s pomočjo snopa žarkov [11]	4
Slika 4: Reflektor Leica GPH1P [12]	5
Slika 5: Podnožje in stativ [13].....	6
Slika 6: Izvedba meritev v laboratoriju za komparacijo nivelmanskih lat	6
Slika 7: Shema meritev	7
Slika 8: Grafični prikaz delovanja Kalmanovega filtra [9]	11

Kazalo preglednic

Preglednica 1: Specifikacije instrumenta TS30.....	4
Preglednica 2: Specifikacije pogona instrumenta Leica TS30	4
Preglednica 3: Specifikacija reflektorja GPH1P proizvajalca Leica Geosystems.....	5
Preglednica 5: Preglednica z opisom testiranja.....	17
Preglednica 6: Koordinate začetne in končne točke referenčne linije.....	17
Preglednica 7: Koordinate stojiščne točke in končnih točk T1 in T2.....	18
Preglednica 8: Izbor koeficientov šuma $\sigma\omega$ za test 1	25
Preglednica 9: Izbor koeficientov šuma $\sigma\omega$ za test 2.....	29
Preglednica 10: Izbor koeficientov šuma $\sigma\omega$ za 3. test.....	33

Kazalo grafikonov

Grafikon 1-3: Prikaz poteka referenčne linije (zeleno) in izravnane premice (modro) glede na merjene točke (rdeče) za vsak test.....	19
Grafikon 4–9: Prikaz cenilk glede na spreminjanje koeficienta šuma σ_ω , rdeče – vsota (absolutnih) pravokotnih odmikov od referenčne linije (desno) in izravnane premice (levo), modra polna – oddaljenost zadnje filtrirane točke od zadnje merjene točke, modra črtkana – vsota (absolutnih) razlik hitrosti med filtrirano in merjeno točko.....	21
Grafikon 10: Časovni interval zajema med zaporednim zajemom merjenih točk pri testu 1	24
Grafikon 11–20: Prikaz 2D položaja filtriranih točk in hitrosti pri različni izbiri σ_ω za test 1, levi stolpec: zeleno – referenčna linija, cian – izravnana premica, modra – filtrirane točke, rdeča – merjene točke, desni stolpec: rdeča – izračunane hitrosti iz koordinat merjenih točk, modro – hitrosti iz Kalmanovega filtra.....	27
Grafikon 21: Časovni interval zajema med zaporednim zajemom merjenih točk pri testu 2	28
Grafikoni 22-31: Prikaz 2D položaja filtriranih točk in hitrosti pri različni izbiri σ_ω za test 2, levi stolpec: zeleno – referenčna linija, cian – izravnana premica, modra – filtrirane točke, rdeča – merjene točke, desni stolpec: rdeča – izračunane hitrosti iz koordinat merjenih točk, modro – hitrosti iz Kalmanovega filtra.....	31
Grafikon 32: Časovni interval zajema med zaporednim zajemom merjenih točk pri testu 3.....	32
Grafikoni 33-42: Prikaz 2D položaja filtriranih točk in hitrosti pri različni izbiri σ_ω za test 3, levi stolpec: zeleno – referenčna linija, cian – izravnana premica, modra – filtrirane točke, rdeča – merjene točke, desni stolpec: rdeča – izračunane hitrosti iz koordinat merjenih točk, modro – hitrosti iz Kalmanovega filtra.....	35
Grafikoni 43-48: Izračuni pri optimalni oceni parametrov za test 1, grafikon 43 – 2D položaj filtriranih točk (modra) in merjenih točk (rdeča) glede na referenčno linijo (zeleno) in izravnano premico (cian), grafikon 44 – hitrost merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 45 – pospešek merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 46 – razlika hitrosti merjenih in filtriranih točk, grafikon 47– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od referenčne linije, grafikon 48– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od izravnane premice.....	37
Grafikoni 49-54: Izračuni pri optimalni oceni parametrov za test 2, grafikon 49 – 2D položaj filtriranih točk (modra) in merjenih točk (rdeča) glede na referenčno linijo (zeleno) in izravnano premico (cian), grafikon 50 – hitrost merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 51 – pospešek merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 52 – razlika hitrosti merjenih in filtriranih točk, grafikon 53– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od referenčne	

linije, grafikon 54– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od izravnane premice.....	39
Grafikoni 55-60: Izračuni pri optimalni oceni parametrov za test 3, grafikon 55 – 2D položaj filtriranih točk (modra) in merjenih točk (rdeča) glede na referenčno linijo (zelena) in izravnano premico (cian), grafikon 56 – hitrost merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 57 – pospešek merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 58 – razlika hitrosti merjenih in filtriranih točk, grafikon 59– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od referenčne linije, grafikon 60– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od izravnane premice.....	41

1 UVOD

Tehnološki razvoj geodetskega instrumentarija omogoča hiter napredek v kakovosti meritev, hkrati pa tudi izpolnjuje zahtevo po večji natančnosti in ažurnosti podatkov. V številnih primerih je zaradi metodologije dela kvaliteta rezultatov pogojena s količino pridobljenih podatkov. Preveliko število podatkov pa velikokrat pripelje do dolgotrajnih procesov obdelave. Takšne probleme rešujemo s tako imenovanimi metodami filtriranja, ki omogočajo izločitev bistva iz podatkov [2].

Terestrične geodetske meritve so zaradi hitrega napredka meritev GNSS izgubile veljavo na področjih manj natančnih izmer in izmer premikajočih objektov. Večina terestričnih metod izboljšuje kvaliteto rezultatov na podlagi nadštevilnih meritev, te pa je v primerih kinematičnih meritev skoraj nemogoče doseči. V primeru kinematičnih meritev lahko za izboljšavo rezultatov in ocenitev njihove kakovosti uporabimo različne metode. Ena izmed njih je tudi Kalmanov filter.

Kalmanov filter omogoča optimalno odstranitev šuma sistema v smislu metode najmanjših kvadratov. Filter omogoča določitev nadštevilnih meritev in njihove natančnosti, kljub temu, da osnovne meritve omogočajo le enolično določitev neznank. Filter je torej zelo uporaben pri meritvah, kjer nadštevilne meritve niso mogoče, ter pri združevanju meritev dobljenih z različnimi sistemi in različnimi natančnostmi [5].

Kljub izboljšavi natančnosti meritev z naknadnimi obdelavami, pa je potrebno zagotoviti zadostno natančnost instrumentarija. Novodobni instrumenti z raznimi pripomočki vsebujejo avtomatizacijo številnih postopkov in tako omogočajo varčnejše, hitrejše in natančnejše izmere. Avtomatizacija instrumentov je zelo pomembna pri kinematičnih meritvah, saj brez avtomatiziranih meritev, terestrične meritve premikov praktično niso mogoče [2].

V nalogi bomo predstavili sledenje premikajočega objekta na podlagi kinematičnih terestričnih meritev. Kot premikajoč objekt smo uporabili voziček na komparatorju nivelmanskih lat v laboratoriju Katedre za geodezijo, ki zagotavlja linearno (premočrtno) gibanje. Meritve smo naknadno obdelali z metodo Kalmanovega filtra.

2 METODA DELA

2.1 Opis instrumentarija

2.1.1 Elektronski tahimeter

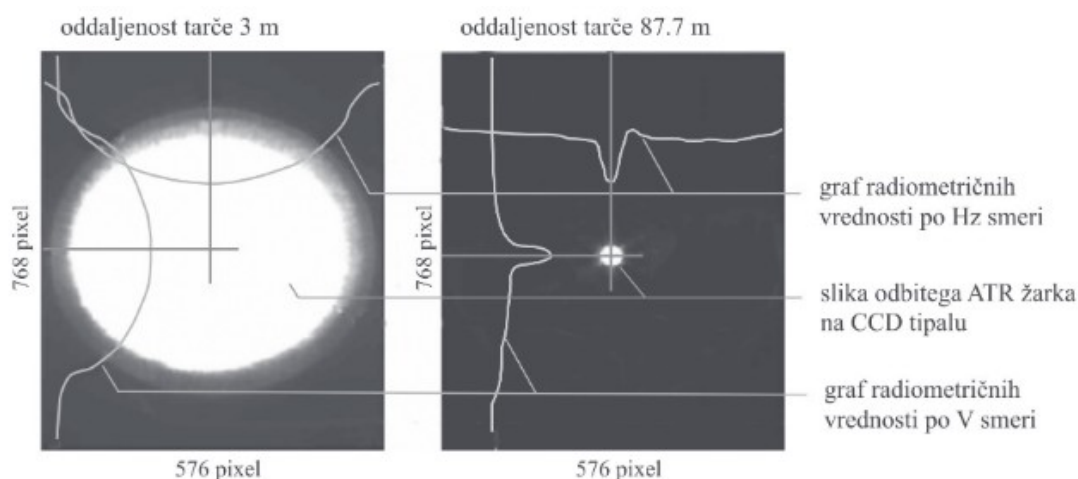
Pri izmeri smo uporabili elektronski tahimeter TS30, proizvajalca Leica Geosystems, prikazan na sliki 1. Instrument sodi v razred elektronskih tahimetrov visoke natančnosti, saj dosega kotne natančnosti $\sigma_{\text{ISO17123-3}} = 0.5''$ in dolžinske natančnosti $\sigma_{\text{ISO17123-4}} = 0.6 \text{ mm}$; 1 ppm, v primeru najnatančnejših meritev. Instrument vsebuje piezzo pogone, ki omogočajo hitre rotacije okrog horizontalne in vertikalne osi. Specifikacije natančnosti instrumenta in pogonskih zmogljivosti so navedene v preglednicah 1 in 2. Piezzo kristali omogočajo mehanske premike z dodajanjem električne energije. Prednost pogona je v hitrosti zasuka, ki dosega do 200 gonov (180°) na sekundo, zelo majhnem koraku na limbu, kar omogoča visoko natančnost instrumenta ter majhni porabi električne energije za premikanje instrumenta okrog osi [1].



Slika 1: Tahimeter Leica TS30 [10]

TS30 je avtomatski elektronski tahimeter, ki omogoča avtomatsko prepoznavanje tarče (APT) ter avtomatsko iskanje tarče (AIT). Komponento APT sestavljata dva dela: avtomatsko viziranje tarče (AVT) in avtomatsko sledenje tarče (AST). AVT predstavlja večji del mehanske in programske opreme sistema APT, sistem AST pa za delovanje uporablja večji del opreme sistema AVT z nekaj programske nadgradnje. AVT s svojim delovanjem nadomesti fino viziranje uporabnika, kar mu omogočajo posebni senzorji CMOS. Senzorji delujejo na principu merjenja intenzitete prejetega

merskega žarka, ki ga instrument pošlje proti tarči. Na podlagi radiometričnih vrednosti v horizontalni in vertikalni smeri, instrument preračuna center tarče, kot je prikazano na spodnji sliki 2. V primeru, da kotna natančnost ni zadovoljiva, instrument s pomočjo izračunane dolžine do tarče izostri sliko in ponovno pošlje signal [2].



Slika 2: Delovanje senzorjev CMOS [2]

Sistem AST pa predstavlja nadgradnjo sistema AVT. Uporabniku omogoča premikanje s tarčo po terenu, brez dodatnega operaterja, ki bi moral grobo vizirati premaknjeno tarčo pred posamezno meritvijo. Sistem uporablja vso strojno opremo sistema AVT, vsebuje le programski dodatek, da tahimeter z oddajanjem in prejemanjem signala konstantno vizira proti tarči in zagotavlja predvidevanje poti tarče v primeru kratkočasne izgube signala. Potreba po AST se pojavi tudi v specifičnih nalogah v geodeziji, kot je bila na primer naša, kjer instrument sledi premikajočemu objektu [2].

Drugi velik korak k avtomatizaciji instrumentov pa je razvoj avtomatskega iskanja tarče (AIT). AIT pokriva preostali del avtomatizacije, ki ga APT ne obsega in s tem omogoča opuščanje človeških vplivov na meritve in potrebo po operaterju. Območje iskanja tarče je zelo veliko (krogla), zato proizvajalci izključujejo strme vizure navzgor in navzdol, saj raziskave kažejo, da se v primeru detajlne izmere, 90% točk nahaja med zenitnima razdaljama 80° in 100° . Ker pa območje iskanja ostaja veliko, se proizvajalci poslužujejo različnih metod omejitve iskalnega območja. Nekateri uporabljajo tehnologijo aktivnih tarč, kjer tarča odda signal instrumentu, drugi pa tehnologijo pasivnih tarč, kjer se uporabljajo standardne tarče. Pri naši nalogi smo uporabili tehnologijo pasivnih tarč, kjer instrument s pomočjo posebno oblikovanega snopa žarkov, ki ga prikazuje slika 3, poišče tarčo. Instrument tarčo najprej poišče po horizontalni osi in nato še po vertikalni osi. Po lociranju tarče sistem preklopi na APT [2].



Slika 3: Prikaz iskanja reflektorja s pomočjo snopa žarkov [11]

Preglednica 1: Specifikacije instrumenta TS30

Koti in dolžine		Natančnost	Povprečen čas meritve
Horizontalni in vertikalni koti $\sigma_{ISO17123-3}$	Ročno	0,5" (0,15 mgon)	/
	APT	1" (0,3 mgon)	/
Dolžine s prizmo $\sigma_{ISO17123-4}$	Precise način	0,6 mm; 1 ppm	7 s
	Standard način	1 mm; 1 ppm	2,4 s
	Fast način	3 mm; 1 ppm	0,8 s
	Tracking način	3 mm; 1 ppm	0,15 s

Preglednica 2: Specifikacije pogona instrumenta Leica TS30

Motorizacija	
Maksimalen pospešek	360° (400 gon) / s ²
Rotacijska hitrost	180° (200 gon) / s
Sprememba krožne lege	2,9 s
Zasuk za 180° (200 gon)	2,3 s

2.1.2 Reflektor in nosilec reflektorja

Prizma reflektorja je sestavljena iz posebno oblikovanega stekla, obdanega s posebnimi odbojnimi premazi, ki zagotavlja najboljši možen odboj s čim manj razpršenosti. Stekljeni diopter je obdan z aluminjastim ohišjem. Na ohišje so nanešeni posebni bakreni in protirjaveči nanosi, ki zagotavljajo dolgo življensko dobo reflektorja. Neodbojen premaz sprednjega dela ohišja pa zmanjša odstotek

nepravilnega odboja. Ohišje prizme je pritrjeno na kovinski mehanizem, ki omogoča pritrditev reflektorja na togo grezilo ali stativ. Na sliki 4 je prikazan izgled reflektorja Leica GPH1P, preglednica 3 pa prikazuje doseg in natančnost reflektorja. Gre za reflektor visoke natančnosti, ki se uporablja za zelo zahtevne naloge v geodeziji [7].



Slika 4: Reflektor Leica GPH1P [12]

Preglednica 3: Specifikacija reflektorja GPH1P proizvajalca Leica Geosystems

Prizma	Natančnost	Doseg
GPH1P	0,3 mm	3500 m

Pri meritvah smo uporabili poseben nosilec, ki je bil izdelan za specifične naloge v geodeziji. Zaradi večje mase in stabilnosti je ohranjal reflektor na istem mestu. Nosilec je bil izdelan po naročilu Fakultete za gradbeništvo in geodezijo.

2.1.3 Podnožje in stativ

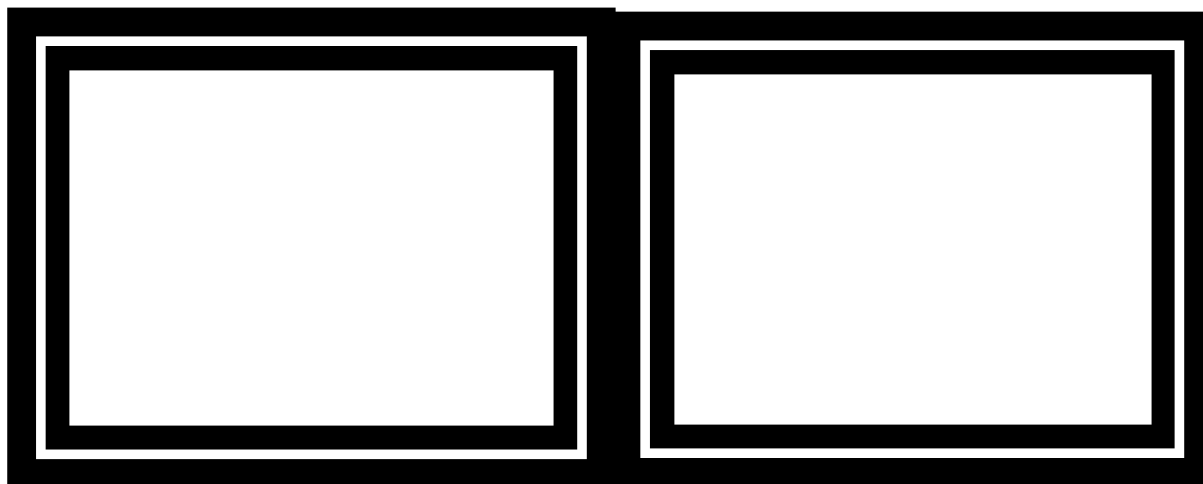
Podnožje sestavlja kovinsko ogrodje z vgradno dozno libelo in tremi vznožnimi vijaki, ki omogočajo horizontiranje podnožja instrumenta ali reflektorja. Kovinsko ogrodje, slika 5, je izdelano tako, da zgornji del omogoča hitro vpenjanje instrumenta, spodnji del pa je namenjen pritjevanju podnožja na stativ. Stativ je zasnovan s kombinacijo kovine in lesa. Pri izdelavi uporabljajo le les bukve ali bora, saj zagotavljata trdnost in odpravljata problem tresenja tal. Kovinski deli so na sliki 5 rdeče obarvani in predstavljajo občutljivejše dele stativa [7].



Slika 5: Podnožje in stativ [13]

2.2 Opis izvedbe izmere

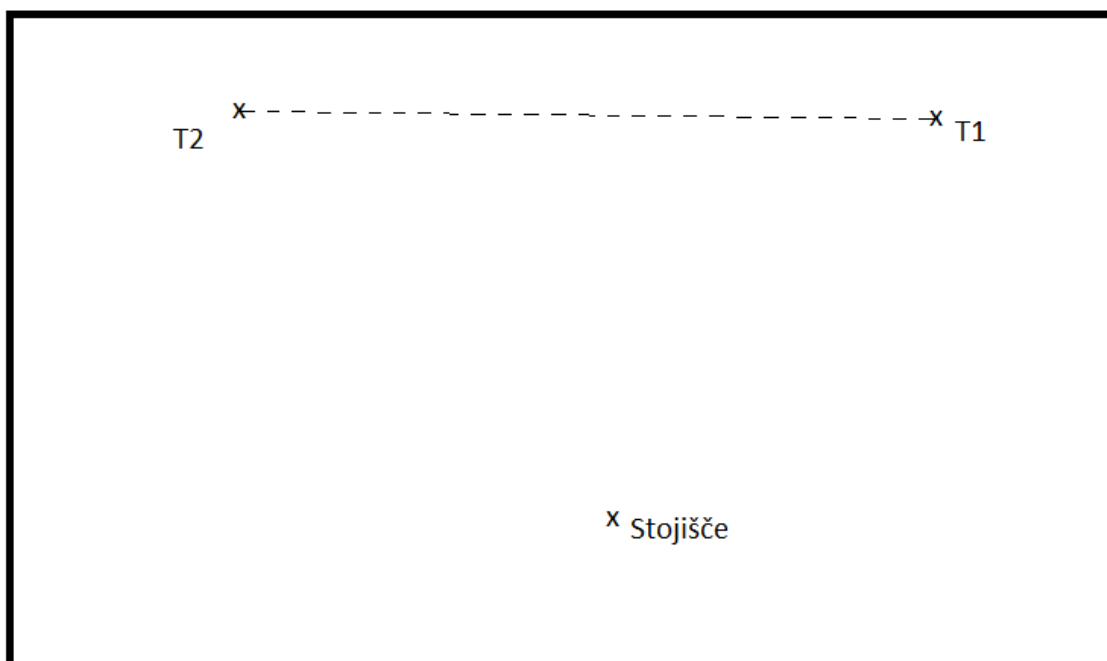
Meritve smo izvajali na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo, slika 6, v laboratoriju kjer se izvaja komparacija nivelmanskih lat. Poleg naštetega uporabljenega instrumenta in pribora smo pri meritvah uporabili še prenosni računalnik, s katerim smo upravljali komparator lat. Voziček komparatorja potuje po podstavku, ki zagotavlja premočrtno gibanje vozička. Natančnost premočrtnega gibanja je po naših ocenah znotraj desetinke milimetra, kar seveda zadostuje zahtevam naše izmere.



Slika 6: Izvedba meritev v laboratoriju za komparacijo nivelmanskih lat

Instrument smo postavili na stativ v laboratoriju. Ker smo meritve izvajali v lokalnem sistemu, centriranje ni bilo potrebno. Reflektor smo prek posebnega nosilca fiksirali na voziček komparatorja. S pomočjo prenosnega računalnika, ki je sestavni del komparatorja, smo zagnali mersko enoto

komparatorja in s tem ustvarili želene pogoje za izmero – premikajoč se reflektor. Shemo referenčnega okvirja meritev prikazujemo na sliki 7.



Slika 7: Shema meritev

Meritve smo razdelili na statičen in kinematičen del. Začetni meritvi sta zajemali določitev položaja končnih točk poti vozička komparatorja. Uporabili smo statičen način merjenja, voziček komparatorja je miroval. Za meritev točk T1 in T2, ki definirata referenčno linijo, smo na elektronskem tahimetru uporabili *Precise* način.

Kinematični del meritev je obsegal meritve do reflektorja na premikajočem se vozičku komparatorja med končnima točkama. Na elektronskem tahimetru smo za to vrsto meritev uporabili način merjenja točk s sledenjem, v nadaljevanju besedila *Tracking* način, ki jo zagotavlja sistem avtomatskega prepoznavanja tarče (APT). Metoda omogoča intervalne meritve proti reflektorju. Pogoj za delovanje tega načina je vnaprej grobo viziran reflektor oziroma iskanje reflektorja preko sistema avtomatskega iskanja tarče (AIT). Instrumentu smo podali zelen časovni interval, v katerem naj instrument registrira meritve.

Kinematični del meritev smo razdelili v dva sklopa. Prvi je zajemal meritve reflektorja pri enakomernem gibanju, drugi pri pospešenem. V nalogi je bil interval meritev z elektronskim tahimetrom nastavljen na 1,00 sekundo za konstantno gibanje in 0,20 sekunde za pospešeno. Analiza povprečne vrednosti časovnega intervala kaže, da je bil v nalogi povprečen interval med meritvama pri enakomernem gibanju enak 1,09 sekunde, pri pospešenem pa 0,22 sekunde. Ker vidimo, da interval ni

popolnoma konstanten, smo v zanki Kalmanovega filtra uporabljali posamezne intervale in ne vrednosti, ki smo jo podali instrumentu.

Instrument je med točkama pri enakomernem gibanju zabeležil 250 točk, pri pospešenem najprej 88, nato še 90 točk, z natančnostjo *Tracking* načina $\sigma_{\text{ISO}_{17123-4}} = 3 \text{ mm}; 1 \text{ ppm}$.

3 KALMANOV FILTER

Sodobna tehnologija je omogočila izvajanje nekaterih procesov, ki pred avtomatizacijo instrumentarijev niso bili mogoči oziroma so bili postopki zelo obsežni in dolgotrajni. V inženirski geodeziji je ena od teh nalog kinematično sledenje premikajočega objekta. Avtomatizacija tahimetrov je omogočila kinematična merjenja do premikajočega se objekta. Ker je objekt v nenehnem gibanju, nadštevila opazovanja niso mogoča. Raziskovalci so v ta namen razvili posebne metode, ki omogočajo odstranitev pogreškov iz meritev ter njihovo evalvacijo [8].

Kalmanov filter je delo madžarskega znanstvenika Rudolfa E. Kalmana, ki je nastalo v začetku 60. let prejšnjega stoletja, na bazi del Gaußa, Kolmogorova in Wienerja. Filter obdeluje podatke o meritvah, o pogreških meritev ter stanju celotnega sistema. Deluje na principu filtriranja po metodi najmanjših kvadratov (MNK), ki ga je v prejšnjem stoletju razvil Weiner. Filtriranje po MNK je uporabljal Weiner, ko je želel iz meritev odstraniti šum in tako razvil Wienerjev filter. Rezultat je utežna funkcija, ki doda uteži meritvam tako, da zagotavljajo optimalno oceno končnega stanja. Lastnosti Wienerjevega filtra so:

- definicija optimalne utežne funkcije,
- obravnavanje meritve in šuma meritve kot slučajni spremenljivki,
- optimalna rešitev je minimalna srednja vrednost kvadratov popravkov [5].

Uporaba Kalmanovega filtra je razširjena na številnih področjih. V geodeziji se je uporaba začela z razvojem tehnologije GNSS, ko se je pojavila potreba po opisu tirnice satelitov. V terestrični geodeziji pa se Kalmanov filter začne uporabljati šele z avtomatizacijo tahimetrov [4].

Filter je sestavljen iz sistema diferencialnih enačb, ki omogočajo združevanje meritev v nekem trenutku z napovedjo na podlagi preteklih meritev. Za čim boljše približanje matematičnega sistema fizični realnosti, je potrebno vedeti, katere količine so pomembne in katere ne. Pomembnost posamezne količine pri Kalmanovem filtru izrazimo z utežmi. Velika prednost Kalmanovega filtra je v združevanju meritev, dobljenih z različnimi sistemi in različnimi natančnostmi. Težava pri obnašanju realnega sistema je, da ni nikoli povsem determinističen, ampak sistem oziroma meritve v sistemu vsebujejo šume. Te količine so dejansko slučajne spremenljivke, zato je potrebno poleg matematičnega vpeljati tudi stohastični model [8].

V matematičnem smislu Kalmanov filter predstavlja rekurzivni postopek, s katerim se, po metodi najmanjših kvadratov, aproksimira iskana količina. V postopku aproksimacije filter poleg meritve v danem trenutku, uporablja tudi podatke vseh predhodnih meritev, ne glede na njihovo natančnost.

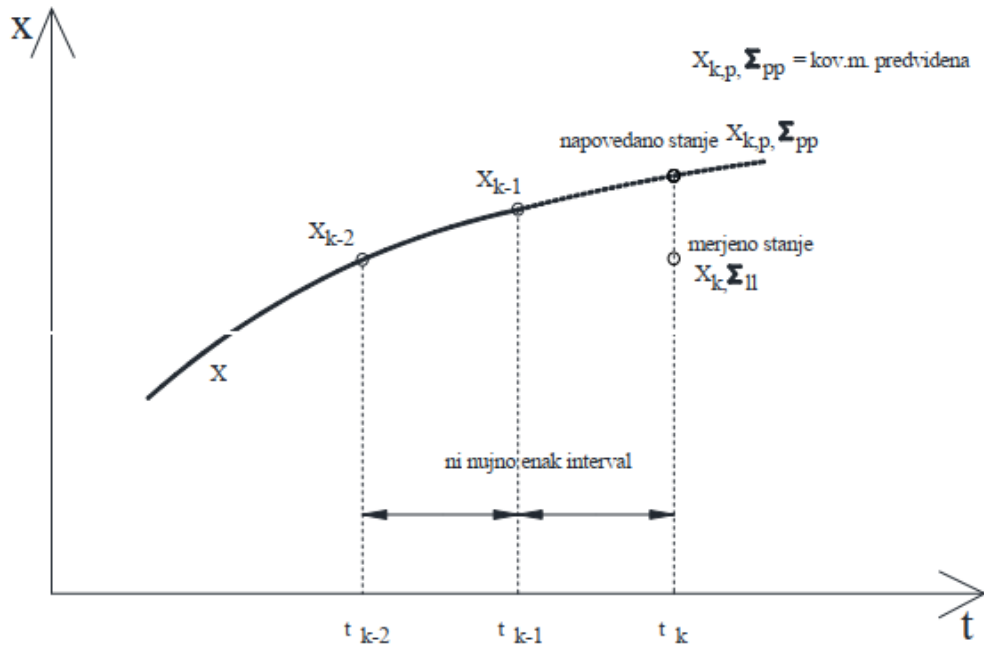
Metoda za pridobitev a-priori in a-posteriori ocene napovedi, potrebuje le eno meritev. Napovedi so prek enačb povezane z novimi meritvami. Povezava med meritvami je lahko linearna, v tem primeru govorimo o linearnem Kalmanovem filtru, ali nelinearna, kjer gre za razširjeni Kalmanov filter in je potrebna linearizacija z razvojem funkcij v Taylorjevo vrsto [8].

Filter s korakom napovedovanja zagotavlja navidezne nadštevilne meritve, ki jih uporabi za odpravljanje merskih pogreškov in izračun natančnosti neznank. Filter uporablja predpostavko, da so šumi meritev in sistema beli ali Gaußovi. Beli šum predpostavlja, da so spremenljivke slučajno porazdeljene in medsebojno nekorelirane, v primeru Gaußovega šuma pa so šumi modelirani z Gaußovo krivuljo, ki ima normalno porazdelitev [6].

3.1 Postopek Kalmanovega filtra

V nalogi smo izvedli kinematične meritve. Instrument je izvedel meritev na podan časovni interval. Merjenje je obsegalo meritev horizontalne smeri, zenitne razdalje in poševne dolžine. Vsaki meritvi je instrument pripisal časovni trenutek zajema meritve, kar nam je omogočilo, da premike obravnavamo kot funkcijo časa. Vpliv časovne latence pri zajemu meritev smo na tem mestu zanemarili, saj presega obseg te naloge. Predpostavili smo torej, da so vse količine zajete ob istem trenutku. Ker gre za izmero, pri kateri nadštevilne meritve niso mogoče, smo uporabili metodo linearnega Kalmanovega filtra, kjer so v postopek obdelave vključene indirektne meritve. V našem primeru so to koordinate točk x, y in H [5].

Zamisel Kalmanovega filtra je združitev enačb sistema ter enačb meritev, ki zagotavljajo informacijo o stanju sistema. Idejo Kalmanovega filtra prikazuje slika 8. V prvem koraku filter napove stanje sistema x_k v trenutku k s pomočjo predhodnih meritev, nato pa uporabi meritev istega trenutka, za izboljšanje predvidenega stanja sistema [9].



Slika 8: Grafični prikaz delovanja Kalmanovega filtra [9]

3.1.1 Linearna enačba stanja sistema

Vektor neznank sistema x_k je definiran:

$$x_k = [\ y \ v_y \ a_y \ x \ v_x \ a_x \ H \ v_H \ a_H \]_k^T, \quad (1)$$

kjer y , x , H predstavljajo koordinate točke, v_y , v_x , v_H hitrost točke v treh smereh in a_y , a_x , a_H pospešek v vseh treh smereh, v trenutku k .

Kalmanov filter uporablja šum sistema kot mero odstopanja matematičnega modela od prave vrednosti. Ob predpostavki, da je pospešek znotraj časovnega intervala konstanten (obremenjen je samo s šumom, ki je normalno porazdeljen), bo šum sistema predstavljal Wienerjev proces. Dejanske meritve se nanašajo na določen trenutek, zato smo kot kinematični model uporabili diskreten model Wienerjevega procesa s pospeškom, ki je podan z enačbo [5]:

$$x_{k+1} = F_k x_k + \Gamma_k \tilde{\omega}_k, \quad (2)$$

kjer x_{k+1} prikazuje stanje sistema, x_k stanje sistema v predhodnem trenutku, F_k matriko prehoda stanja med trenutkoma k in $k+1$, Γ_k vektor izboljšave in $\tilde{\omega}_k$ nekorelirani šum sistema. Šum $\tilde{\omega}_k$ si lahko predstavljamo kot spremembo pospeška v časovnem odseku med k in $k+1$.

3.1.2 Matrika prehoda stanj in kovariančna matrika šuma

Če želimo pospešek opisati kot Wienerjev proces, moramo predpostaviti, da je pospešek znotraj časovnega intervala Δt konstanten šum, šum pa je normalno porazdeljen s srednjo vrednostjo 0 m/s^2 [5]:

$$\tilde{\omega}_k \sim (0, \sigma_{\omega}^2). \quad (3)$$

Matrika prehoda stanj je izpeljana iz diferencialnih enačb in ima v našem primeru obliko:

$$F_k(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

V matriki F_k prikazuje Δt časovni interval med dvema meritvama, ki smo ga izračunali iz časovnih trenutkov zajema meritev.

V primeru, da $\tilde{\omega}_k$ predstavlja enakomeren pospešek, je vpliv pospeška na hitrost in položaj podan s spodnjima enačbama:

$$dv = \tilde{\omega}_k \Delta t \quad (5)$$

$$ds = \tilde{\omega}_k \frac{\Delta t^2}{2}. \quad (6)$$

Šum sistema se v filter vključuje s pomočjo kovariančne matrike Q_k :

$$Q_k = \sigma_\omega^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Kljub temu, da je bil interval meritev nastavljen na 1 sekundo, ne moremo trditi, da je Δt konstanten, saj opazimo manjše razlike med časovnimi oznakami meritev. Izbira velikosti šuma pospeška je povsem subjektivna. Po navedbah nekaterih virov, se v praksi najbolje odraža izbira velikosti med polovično in celo vrednostjo maksimalne spremembe pospeška $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$ [5].

3.1.3 Prenos varianc in kovarianc

V splošnem delimo Kalmanov filter na razširjen in linearen Kalmanov filter. V prvem primeru se enačbe filtra nanašajo na direktne vrednosti oziroma direktne meritve (H_z , z_r , d). V linearnem filtru, ki smo ga uporabili v nalogi, pa so znane količine koordinate točk (y , x , H).

Koordinate točk smo izračunali predhodno in sicer po enačbi:

$$l_k = \begin{bmatrix} y_k \\ x_k \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{ST} + d_k \sin(zr_k) \cos(Hz_k) \\ x_{ST} + d_k \sin(zr_k) \sin(Hz_k) \\ H_{ST} + d_k \cos(zr_k) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

kjer so:

y_k , x_k , H_k ...koordinate merjene točke v trenutku k ,

y_{ST} , x_{ST} , H_{ST} ...koordinate stojišča,

d_k ...poševna dolžina med stojiščno točko in merjeno točko v trenutku k ,

zr_k ...zenitna razdalja med stojiščno točko in merjeno točko v trenutku k ,

H_{z_k} ...horizontalna smer med stojiščno točko in merjeno točko v trenutku k .

Popravkov zaradi refrakcije in ukrivljenosti Zemlje smo pri izračunu višin izpustili, saj sta pri tako kratkih dolžinah, v primerjavi z natančnostjo uporabljene metode izmere, zanemarljiva.

Linearen primer Kalmanovega filtra zahteva izračun kovariančne matrike meritev po prenosu varianc in kovarianc. Kovariančno matriko meritev R_k izračunamo iz matrike parcialnih odvodov N_k in kovariančne matrike direktnih meritev R_D :

$$N_k = \begin{bmatrix} -d_k \sin(zr_k) \sin(Hz_k) & \sin(zr_k) \cos(Hz_k) & d_k \cos(zr_k) \cos(Hz_k) \\ d_k \sin(zr_k) \cos(Hz_k) & \sin(zr_k) \sin(Hz_k) & d_k \cos(zr_k) \sin(Hz_k) \\ 0 & \cos(zr_k) & -d_k \sin(zr_k) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$R_D = \begin{bmatrix} \sigma_{Hz}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zr}^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

kjer so σ_{Hz}^2 , σ_d^2 in σ_{zr}^2 variance meritev.

Kovariančno matriko meritev R_k dobimo po enačbi:

$$R_k = N_k R_D N_k^T. \quad (11)$$

Kovariančno matriko izračunamo za vsak trenutek posebej in se nanaša na posamezno točko v trenutku k [5].

3.1.4 Linearna enačba meritev

Drugi korak Kalmanovega filtra združuje meritve z napovedjo. Povezava med stanjem sistema x_k in meritvami l_k je linearna:

$$l_k = H_k x_k + u_k. \quad (12)$$

V enačbi predstavlja H_k mersko matriko, ki povezuje vektor stanj in meritve, vektor u_k pa pogreške meritev oziroma šum meritev. Šum meritev predstavlja matrika R_k , ki je lahko konstantna ali se spreminja s časom. V nalogi se je matrika R_k spreminjala za posamezno meritev.

[illegible]

3.1.5 Začetni pogoji ali inicializacija filtra

Inicializacija je podana z začetno vrednostjo vektorja stanja sistema x_0 in začetno kovariančno matriko tega vektorja P_0 :

$$x_0 = [y_0 \quad v_{y0} \quad a_{y0} \quad x_0 \quad v_{x0} \quad a_{x0} \quad H_0 \quad v_{H0} \quad a_{H0}]_k^T, \quad (14)$$

[illegible]

V našem primeru smo kot začetne koordinate točke uporabili kar koordinate točke T1, ki so podane v preglednici 6, hitrosti in pospeške po posameznih koordinatnih oseh pa smo nastavili na 0 m/s in 0 m/s², saj je reflektor na začetku meritev miroval. Začetno kovariančno matriko procesa smo izbrali na podlagi vira, kjer so opravljali podobne teste [5].

$$P_0 = 0.0001 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

3.1.6 Kalmanova zanka

Ko smo definirali vse količine, ki nastopajo v Kalmanovem filtru, lahko nastavimo enačbe Kalmanove zanke. Kalmanova zanka je sestavljena iz petih korakov, kjer prvi trije koraki predstavljajo popravljanje napovedi z meritvijo, zadnja dva pa napoved naslednjega stanja [9].

- i. Matrika ojačenja K_k je odvisna od a-priori kovariančne matrike procesa P_{k-1} in kovariančne matrike meritev R_k :

- ii.

$$K_k = P_{k-1}H^T(HP_{k-1}H^T + R_k)^{-1}, \quad (17)$$

- iii. Ocena novega vektorja stanja sistema x_k na podlagi razlike med dejansko in napovedano meritvijo popravi napovedano vrednost:

$$x_k = x_{k-1} + K_k(l_k - Hx_{k-1}), \quad (18)$$

- iv. Filter na podlagi matrike ojačanja K_k izračuna novo vrednost kovariančne matrike P_k :

$$P_k = (I - K_kH)P_{k-1} \quad (19)$$

- v. Napoved naslednjega koraka s pomočjo matrike prehoda stanj F_k :

$$x_{k+1} = F_kx_k \quad (20)$$

- vi. Izračun kovariančne matrike stanja sistema napovedanega koraka:

$$P_{k+1} = F_kP_kF_k^T + Q_k \quad (21)$$

V enačbah od (17) do (21) predstavljajo:

K_k ... matriko ojačenja v trenutku k ,

P_{k-1}, P_k, P_{k+1} ... kovariančno matriko stanja sistema v trenutku $k-1$, k in $k+1$,

H ... mersko matriko v trenutku k – enačba (13),

R_k ... kovariančno matriko meritev v trenutku k – enačba (11),

x_{k-1}, x_k, x_{k+1} ... vektor stanja sistema v trenutku $k-1$, k in $k+1$,

l_k ... vektor meritev – enačba (8),

F_k ... matriko prehoda stanj v trenutku k – enačba (4),

Q_k ... kovariančno matriko šuma sistema v trenutku k – enačba (7).

4 ANALIZA REZULTATOV

Testiranje je potekalo v treh sklopih. Test 1 zajema meritve enakomernega gibanja in njihovo naknadno obdelavo. Druga dva testa predstavljata meritve pospešenega gibanja, kakor to prikazuje preglednica 5. S pomočjo klasične izmere smo določili referenčno linijo. Glede na referenčno linijo smo izračunali pravokotne odmike merjenih in filtriranih točk. Izračunali smo hitrosti in pospeške posameznega sklopa meritev ter naredili primerjavo filtriranih in merjenih točk.

Preglednica 4: Preglednica z opisom testiranja

Test 1	Enakomerno gibanje
Test 2	Pospešeno gibanje
Test 3	Pospešeno gibanje

4.1 Analiza meritev

4.1.1 Določitev referenčne linije

Kvaliteto meritev, kjer nadštevilne meritve niso mogoče, je možno preveriti glede na odstopanja od referenčne linije, ki je določena z večjo natančnostjo. Odločili smo se, da glede na konstrukcijo komparatorja, kot referenčno linijo uporabimo premico, ki poteka skozi končni točki T1 in T2. Končni točki sta položaja reflektorja na vozičku komparatorja, ko je bil v začetni in končni legi. Instrument TS30 za najnatančnejše izmere uporablja *Precise* način merjenja. Natančnost kotnih meritev v tem načinu je $\sigma_{\text{ISO}17123-3} = 0.5''$, dolžinska natančnost pa $\sigma_{\text{ISO}17123-4} = 0,6 \text{ mm}; 1 \text{ ppm}$. Za tovrstno meritev instrument porabi približno 7 sekund. Zaradi zahteve po višji natančnosti določitve referenčne linije smo do posamezne točke izvedli po 10 meritev, kot prikazuje preglednica 5, in tako z naknadno obdelavo povečali natančnost določitve končnih točk.

Preglednica 5: Koordinate začetne in končne točke referenčne linije

Točka	Oznaka meritve	y [m]	x [m]	H [m]
T1	300	999.4752	1002.5349	99.9811
	301	999.4752	1002.5349	99.9811
	302	999.4752	1002.5350	99.9811
	303	999.4752	1002.5351	99.9811
	304	999.4752	1002.5351	99.9811
	305	999.4752	1002.5352	99.9811
	306	999.4752	1002.5350	99.9811
	307	999.4752	1002.5351	99.9811
	308	999.4752	1002.5351	99.9811
	309	999.4752	1002.5352	99.9811

T2	700	996.2789	1002.1899	99.9811
	701	996.2787	1002.1900	99.9810
	702	996.2788	1002.1899	99.9811
	703	996.2786	1002.1901	99.9810
	704	996.2785	1002.1901	99.9811
	705	996.2787	1002.1900	99.9811
	706	996.2788	1002.1899	99.9810
	707	996.2787	1002.1900	99.9810
	708	996.2786	1002.1900	99.9811
	709	996.2787	1002.1900	99.9810

Meritve smo izvedli v lokalnem koordinatnem sistemu, kjer ima stojiščna točka koordinate prikazane v preglednici 6.

Preglednica 6: Koordinate stojiščne točke in končnih točk T1 in T2

Točka	y [m]	x [m]	H [m]	σ [mm]
S	1000,0000	1000,0000	100,0000	/
T1	999,4752	1002,5350	99,9811	0,102
T2	996,2787	1002,1900	99,9811	0,122

Meritve proti končnima točkama smo opravili z enega stojišča, končne koordinate smo ocenili z aritmetično sredino. Redukcija dolžin ni bila potrebna, saj se zunanji pogoji med meritvami niso spreminjali, merjene dolžine pa so bile kratke (do 5m). Rezultati izračuna so zbrani v preglednici 7, kjer je podana tudi skupna natančnost določitve obeh končnih točk, izračunana kot standardi odklon aritmetične sredine.

4.1.2 Določitev izravnane premice

Če predpostavimo, da referenčna linija predstavlja teoretično pot reflektorja, *Tracking* meritve od te poti odstopajo. Problem pri primerjavi referenčne linije z rezultati, ki jih dobimo iz zanke Kalmanovega filtra, je v tem, da se filtrirane točke nanašajo na merjene točke in ne na referenčno linijo. Ker v primeru *Tracking* meritev, že prva meritev odstopa od referenčne linije, za enako vrednost odstopa tudi prva filtrirana točka.

Za ocenjevanje kakovosti rezultatov Kalmanovega filtra bomo primerjali pravokotne odmike merjenih in filtriranih točk tako od referenčne linije kot tudi od izravnane premice.

Enačba izravnane premice:

$$y = kx + n, \quad (22)$$

parametra premice predstavljata koeficient naklona premice in začetno vrednost (k in n). Do optimalnih vrednosti parametrov premice pridemo s funkcijo:

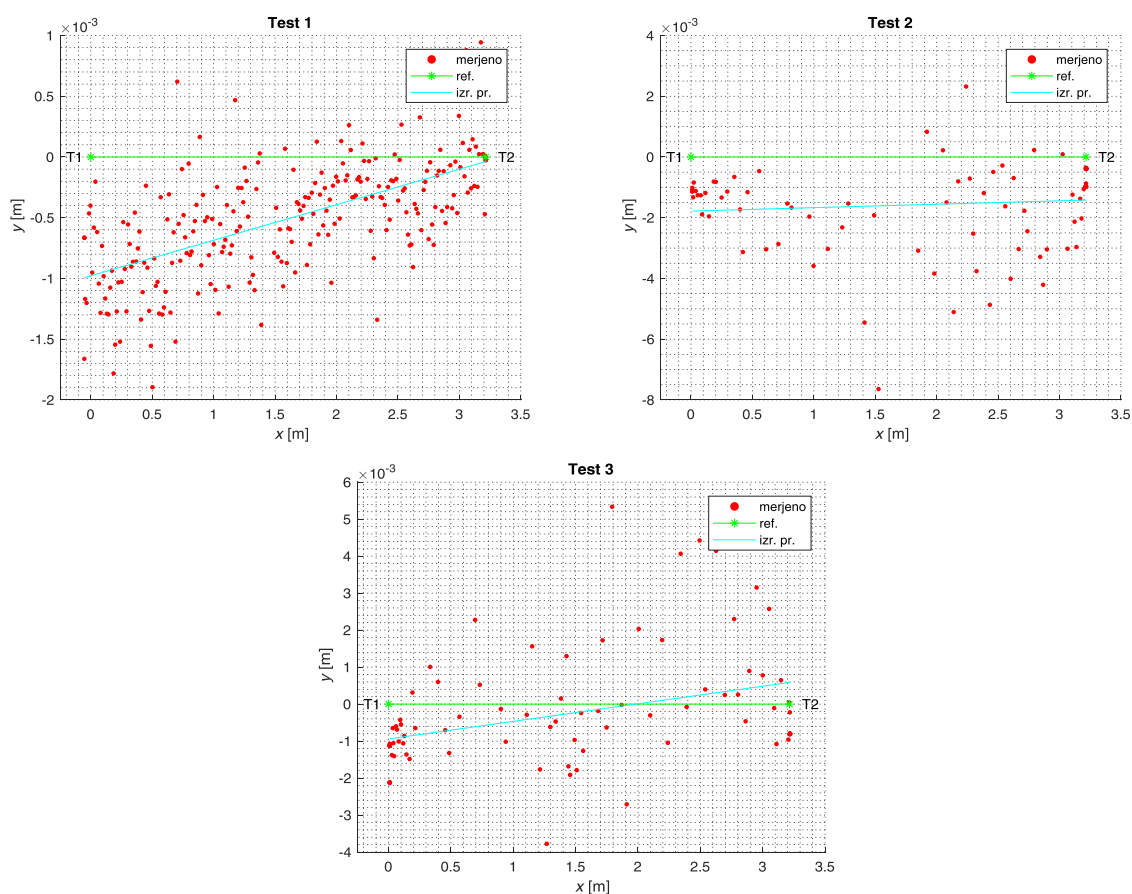
$$F(k, n) = \sum_{i=1}^n ((n + kx_i) - y_i)^2, \quad (23)$$

kjer y_i in x_i predstavljata koordinati merjene točke i . V smislu metode najmanjših kvadratov dobimo optimalno oceno parametrov k in n , ko velja:

$$F(k, n) = \min. \quad (24)$$

V primeru, da vse merjene točke ležijo na premici, velja:

$$F(k, n) = 0. \quad (25)$$



Grafikon 1-3: Prikaz poteka referenčne linije (zeleno) in izravnane premice (modro) glede na merjene točke (rdeče) za vsak test

Smiselnost uporabe izravnane premice je dobro razvidna z grafikonom 1 – 3, kjer se izravnana premica bolje prilega meritvam kot referenčna linija. Razvidno je relativno veliko odstopanje referenčne linije na začetku testa 1 in pri celotnem testu 2. Če natančneje razložimo problem uporabe referenčne linije na primeru testa 2: v primeru preračuna pravokotnih odmikov merjenih ali filtriranih točk od referenčne linije, bi dobili najboljše rezultate tam, kjer so odstopanje od izravnane premice merjenih točk večje. Potrebno pa je poudariti, da je največja razlika med referenčno linijo in izravnano premico manjša od 2 mm.

4.2 Analiza postopka filtriranja

V analizi filtriranja je cilj naloge tudi v določitvi optimalne vrednosti matrike Q_k , tako da se bodo filtrirane vrednosti čim bolj prilegale referenčnim, oz. da bodo odmiki filtriranih točk od referenčne linije/izravnane premice čim manjši. Matrika Q_k predstavlja kovariančno matriko šuma, preko katere podamo zaupanje v matematični model. V različnih virih [5] je zaslediti, da je najboljša izbira koeficienta šuma na intervalu $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$, kjer je Δa_{MAX} največja sprememba pospeška znotraj intervala meritev. Optimalno matriko šuma smo testirali tudi na širšem območju. Cenilko kakovosti nam predstavlja odstopanje filtriranih točk od referenčne linije.

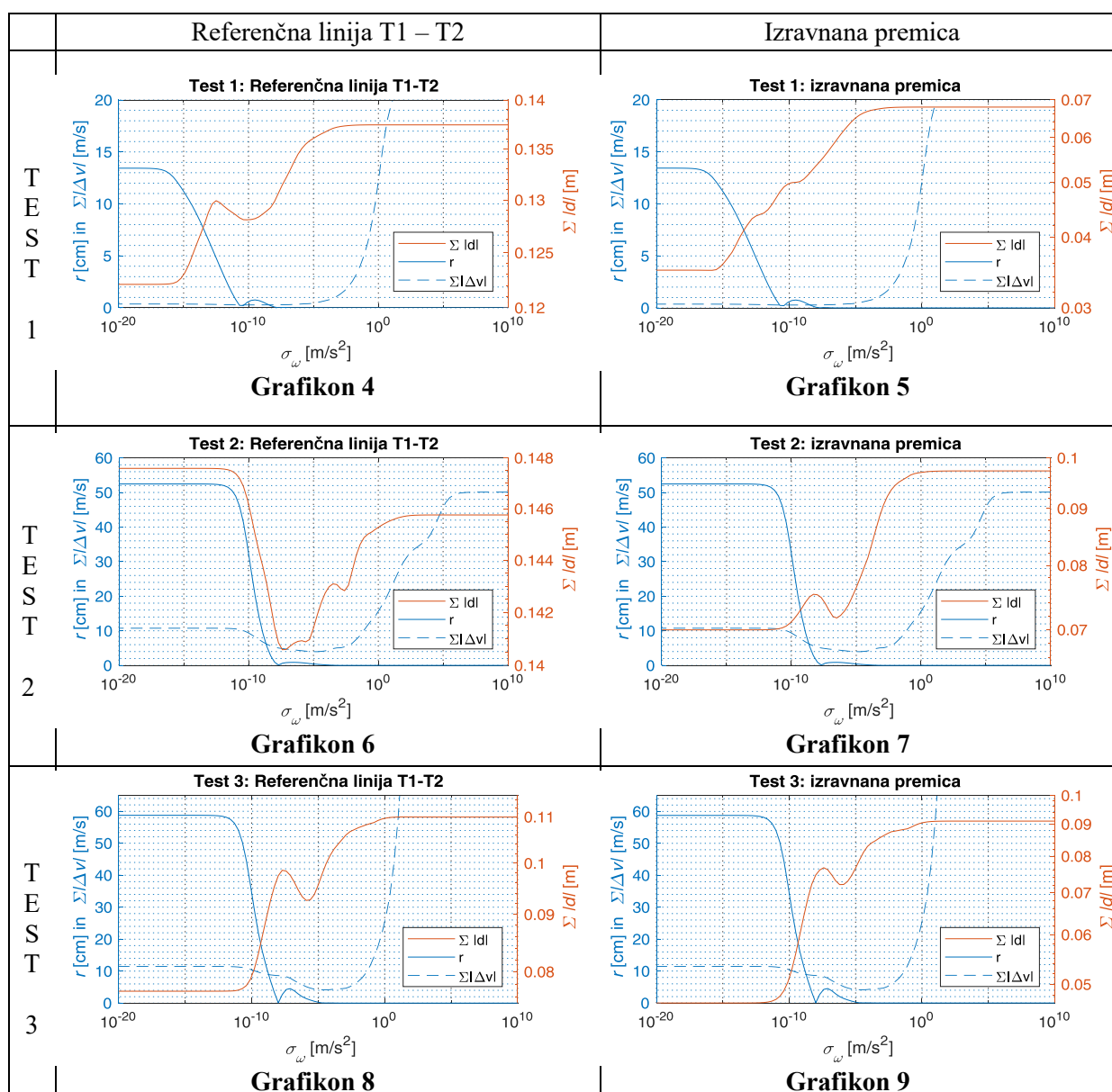
Matrika P_k predstavlja kovariančno matriko stanja sistema. V postopku Kalmanovega filtra se matrika P preračunava glede na posamezen korak in je mi ne moremo spreminjati. Lahko pa vplivamo na njeno določitev v postopku inicializacije (matrika P_0 – enačba 15), kjer je pomembno, da začetne parametre nastavimo tako, da ne vplivajo na nadaljnje rezultate. Spreminjanje te matrike ima vpliv le na začetno prilagajanje funkcije.

V postopku iskanja optimalne ocene je pomembna tudi kovariančna matrika meritev R_k (enačba 11), ki jo izračunamo s prenosom varianc in kovarianc. Matrika R_k se v zanki filtra preračuna za vsak korak posebej, vsak korak pa izhaja iz kovariančne matrike direktnih meritev R_D (enačba 10). V matriko R_D so vključene natančnosti horizontalnih smeri, zenitnih razdalji ter merjenih dolžin. Natančnejše kot so meritve, večja je stopnja zaupanja v meritve.

4.2.1 Določitev optimalnih parametrov Kalmanovega filtra

Interval iskanja optimalnih parametrov Kalmanovega filtra smo razširili na interval $10^{-20} \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10} \text{ m/s}^2$. Predpostavimo, da optimalno vrednost matrike Q_k dosežemo takrat, ko rezultati filtriranja najmanj odstopajo od referenčne linije ali izravnane premice. Kakovost filtra smo ocenjevali s tremi cenilkami, ki so po našem mnenju najbolj vplivale na končne rezultate. Kot cenilke kakovosti

smo uporabili vsoto (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\Sigma|d|$ od referenčne linije ali izravnane premice, oddaljenost r med zadnjo filtrirano točko in zadnjo merjeno točko ter vsoto (absolutnih) razlik filtriranih in merjenih hitrosti $\Sigma|\Delta v|$. Za prikaz vpliva vsake cenilke pri izbranem σ_ω , smo uporabili preračun na referenčno linijo in izravnano premico, kar je razvidno z grafikonov 4–9. Grafikoni v levem stolpcu predstavljajo preračun na referenčno linijo, v desnem pa na izravnano premico. Vrstice se nanašajo na številko testa.



Grafikon 4–9: Prikaz cenilk glede na spreminjanje koeficienta šuma σ_ω , rdeče – vsota (absolutnih) pravokotnih odmikov od referenčne linije (desno) in izravnane premice (levo), modra polna – oddaljenost zadnje filtrirane točke od zadnje merjene točke, modra črtkana – vsota (absolutnih) razlik hitrosti med filtrirano in merjeno točko

Kot prvo cenilko smo uporabili vsoto (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\Sigma|d|$, enkrat od referenčne linije in drugič od izravnane premice. Najboljši rezultat v tem primeru dobimo, ko je

(absolutna) vsota vseh pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ od referenčne linije ali izravnane premice najmanjša. Manjša vrednost koeficienta σ_ω predstavlja večje zaupanje v matematični model.

Vsoto (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ od referenčne linije v odvisnosti od vrednosti koeficienta σ_ω za test 1 prikazuje grafikon 4, s katerega je razvidno, da filtrirane točke najbolj sovpadajo z referenčno linijo ob večjemu zaupanju v matematični model, to je pri majhnih vrednostih koeficienta σ_ω . V primeru velikih vrednosti koeficienta šuma σ_ω so odstopanja od referenčne linije velika. Velik vpliv na končen rezultat pa imajo v tem primeru same meritve. Najboljše rezultate v primeru enakomernega gibanja dobimo pri $\sigma_\omega = 10^{-20} [m/s^2]$, kjer filtrirane koordinate točk najbolj sovpadajo z referenčno linijo. Podobno velja tudi za grafikon 5, ki prikazuje rezultate, preračunane na izravnano premico. Rezultati so najboljši pri zelo majhnem σ_ω , saj se filtrirane točke najbolj prilegajo izravnani premici. Razlika med grafikonoma 4 in 5 se pojavi okrog $\sigma_\omega = 10^{-10} [m/s^2]$, kjer je lokalni minimum v 4 grafikonu veliko bolj zaznaven.

Oba grafikona sta v obliki črke »S«, kar pomeni, da model enakomernega gibanja dobro opisuje gibanje reflektorja. Glede na dejstvo, da so enakomerno gibanje reflektorja vodili elektromotorji komparatorja, je boljši rezultat pri večjem zaupanju v model smiseln (pri majhnih vrednostih koeficienta σ_ω).

Druga cenilka kakovosti, s katero smo ocenili rezultate, je oddaljenost r med zadnjo filtrirano točko in zadnjo merjeno točko. V primeru zelo velikega zaupanja v matematični model in nezaupanja v meritve (majhen σ_ω), se zadnja filtrirana točka v primeru grafikonov 4 in 5 oddalji za približno 13 cm, kar je glede na natančnost naših rezultatov absolutno preveč. Če predpostavimo, da je lahko maksimalna razlika med zadnjima točkama $r = 1$ cm, dobimo smiselne rezultate šele pri $\sigma_\omega > 10^{-11} [m/s^2]$, kar je precej drugače, kot v primeru prve cenilke.

Vsota (absolutnih) razlik filtriranih in merjenih hitrosti $\sum |\Delta v|$ je bila uporabljena kot tretja cenilka. V primeru testa 1 se vrednost te cenilke začne krepko povečevati, ko je $\sigma_\omega > 10^{-3} [m/s^2]$. Z drugo in tretjo cenilko smo tako precej zožili interval koeficienta šuma σ_ω , ki ga želimo izbrati tako, da bodo rezultati filtriranja čim najmanj odstopali od referenčne linije ali izravnane premice.

Grafikona 6 in 7 predstavljata vpliv cenilk na rezultate testa 2. V primeru vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ pride do velike razlike med grafikonoma. Prvi (levi) grafikon ima globalni minimum pri $\sigma_\omega = 10^{-7} [m/s^2]$, drugi (desni) pa najboljše prileganje prikazuje pri zelo majhnih σ_ω . Če se vsota (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ v primeru

zmanjševanja σ_ω povečuje, so rezultati ob večjemu zaupanju v model slabši, na kar nakazuje tudi grafikon 6. V tem primeru model ne opiše dobro pospešenega gibanja reflektorja. Če upoštevamo še grafikon 2, lahko sklepamo, da so razlike med grafikonoma 6 in 7 nastale zaradi velikega odstopanja izravnane premice od referenčne linije.

Na grafikonu 6 lahko opazimo lokalni minimum vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum |d|$ pri vrednosti koeficienta šuma $\sigma_\omega \approx 10^{-7} [m/s^2]$. Če upoštevamo še izračunane vrednosti druge (oddaljenost med zadnjo filtrirano točko in zadnjo merjeno točko) in tretje (vsota (absolutnih) razlik filtriranih in merjenih hitrosti $\sum |\Delta v|$) cenilke, pa vidimo, da se nam rezultati najbolje prilegajo referenčni liniji ali izravnani premici, če uporabimo vrednost koeficienta šuma $\sigma_\omega \approx 10^{-7} [m/s^2]$ v lokalnem minimumu.

V primeru testa 3 ni večjih razlik med preračunom na referenčno linijo in izravnano premico, kot prikazujeta grafikona 8 in 9. Majhne razlike so bile v primeru testa 3 pričakovane, saj referenčna linija in izravnana premice najbolj sovpadata (glej grafikon 3).

Lokalni minimum vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ pri testu 3 zelo dobro sovпада z minimalno oddaljenostjo zadnjih točk r in vsoto razlik hitrosti $\sum |\Delta v|$. Glede na izbrane cenilke dobimo najboljše rezultate pri izbiri $\sigma_\omega = 10^{-6} [m/s^2]$. Zelo veliko napako bi naredili, če bi kot cenilko upoštevali samo vsoto pravokotnih odmikov, saj je pri najmanjši vsoti (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ ($\sigma_\omega = 10^{-20} [m/s^2]$), oddaljenost med zadnjo filtrirano in zadnjo merjeno točko $r > 58$ cm.

Glede na rezultate testov je najboljša posamezna cenilka pri izbiri koeficienta šuma σ_ω vsota (absolutnih) razlik hitrosti merjenih in filtriranih točk $\sum |\Delta v|$. Na vseh grafikonih 4 – 9, se izkaže, da ob izbiri koeficienta šuma σ_ω v minimumu funkcije vsote razlik hitrosti, dobimo najmanjše odstopanje posamezne cenilke, v primerjavi z izbiro vseh cenilk kakovosti.

Ob upoštevanju vseh treh cenilk lahko interval na katerem iščemo optimalni koeficient šuma σ_ω še dodatno omejimo. Vsota (absolutnih) odmikov filtriranih točk od referenčne linije ali izravnane premice $\sum |d|$ na vseh treh testih pokaže, da rezultatov, ki jih dobimo ob izbiri $\sigma_\omega > 10^0 [m/s^2]$, ni več smiselno upoštevati. Rezultati Kalmanovega filtra se v tem primeru skoraj ne razlikujejo od samih merjenih točk – zaupanje v rezultate meritev je veliko. Predstavitev procesa z modelom pa je slaba – modelu malo zaupamo. Do podobnih ugotovitev pridemo tudi v primeru, če kot cenilko upoštevamo vsoto (absolutnih) razlik hitrosti merjenih in filtriranih točk $\sum |\Delta v|$.

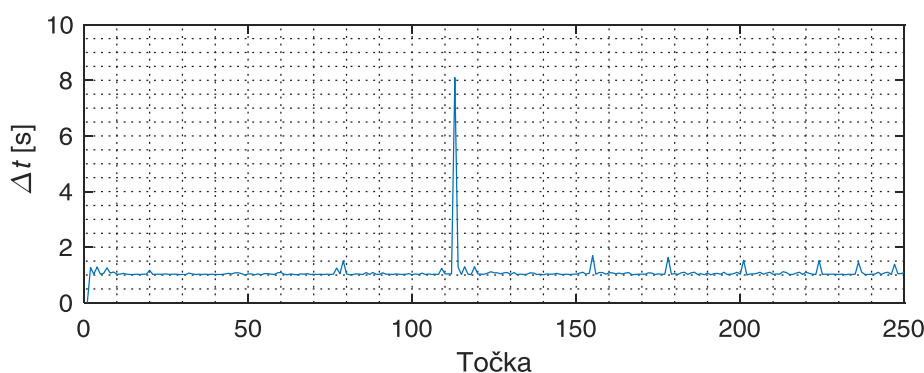
Spodnjo mejo intervala izbire koeficienta šuma σ_ω lahko določimo z oddaljenostjo r zadnje merjene in filtrirane točke. Glede na to, da obravnavamo meritve visoke natančnosti, ocenjujemo, da izbira koeficienta šuma σ_ω , pri oddaljenosti zadnje merjene in filtrirane točke $r > 1 \text{ cm}$, ni smiselna. V tem primeru se je test 1 bolj razlikoval od ostalih dveh, saj dobre rezultate dobimo že veliko prej na intervalu ($\sigma_\omega > 10^{-11} [\text{m/s}^2]$), kot pri ostalih dveh testih ($\sigma_\omega > 10^{-8} [\text{m/s}^2]$).

Glede na vse tri teste smo interval iskanja koeficienta šuma σ_ω omejili na $10^{-11} \text{m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10 \text{ m/s}^2$.

4.2.2 Položaj in hitrost pri različnih izbirah koeficienta šuma σ_ω

i. enakomerno gibanje – test 1

Pri testu 1 smo s *Tracking* načinom merjenja merili reflektor pri enakomernem gibanju. Voziček, na katerega je bil pritrjen reflektor, se je v tem primeru premikal s pomočjo elektromotorjev komparatorja. Izmerjenih je bilo 250 točk. Časovni interval zajema smo nastavili na 1 sekundo, dejanska časovna frekvenca pa je prikazana na grafikonu 10, kjer so vidna odstopanja časovne frekvence med posameznimi meritvami.



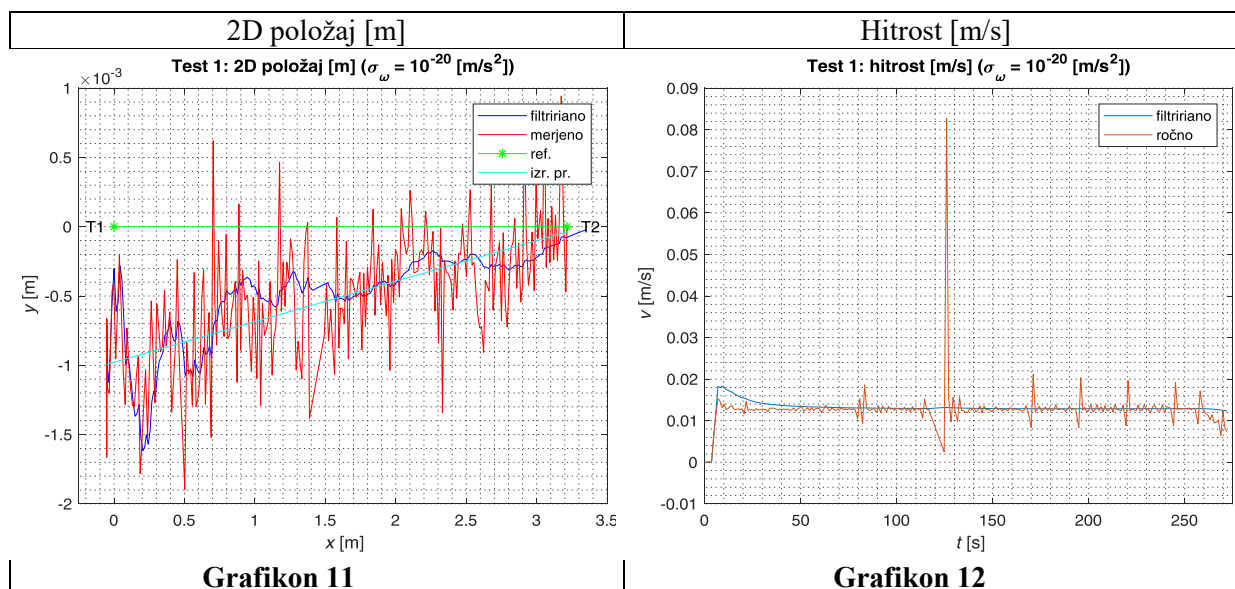
Grafikon 10: Časovni interval zajema med zaporednim zajemom merjenih točk pri testu 1

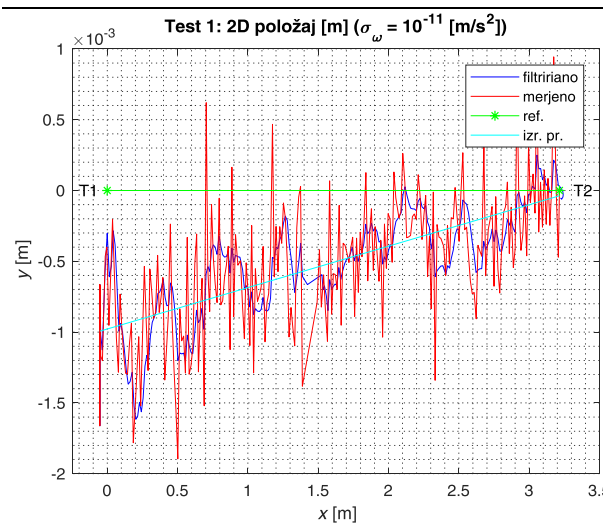
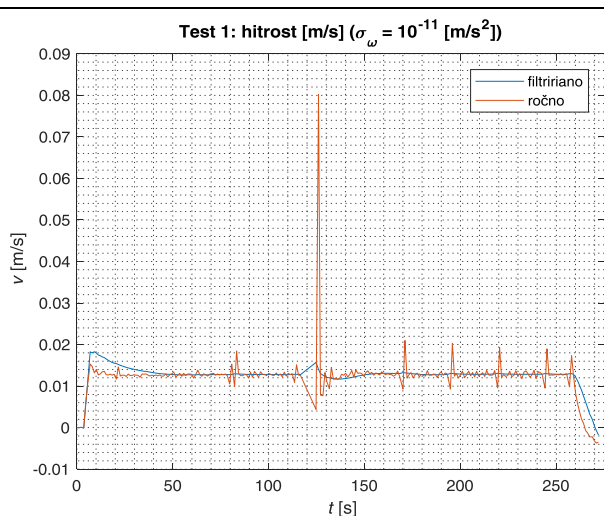
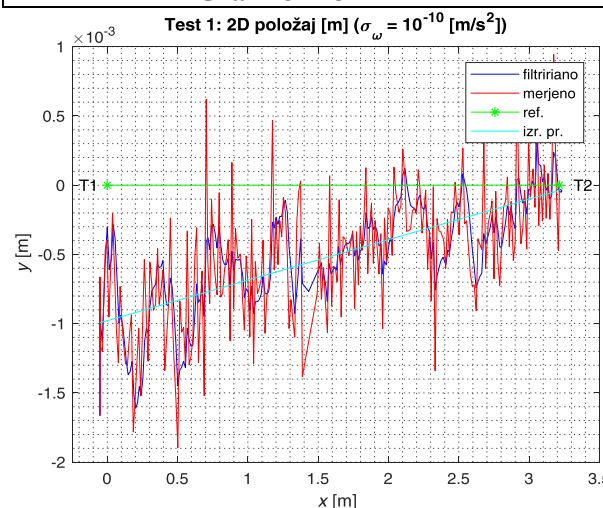
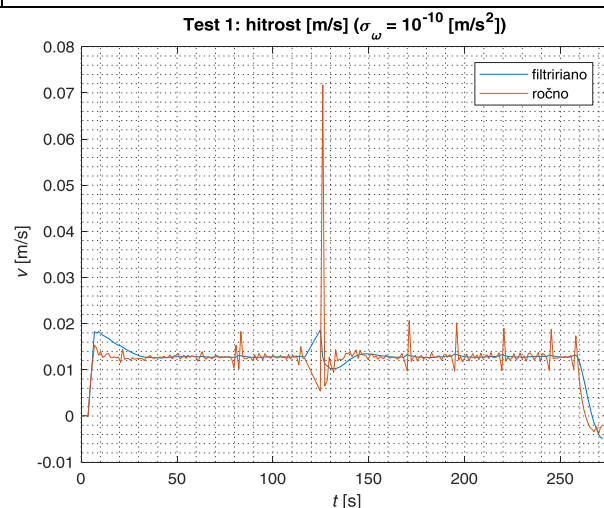
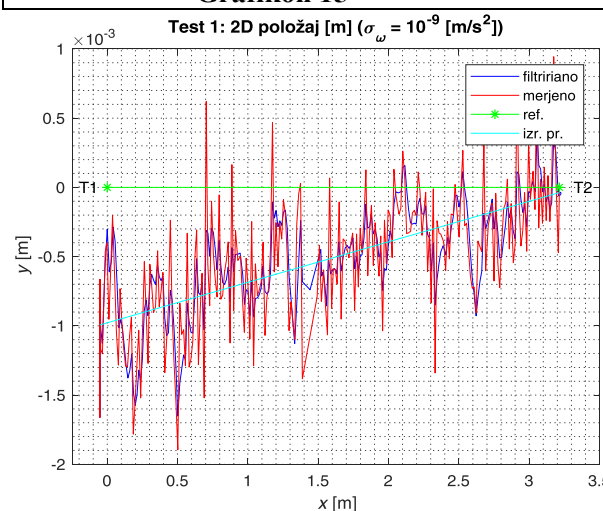
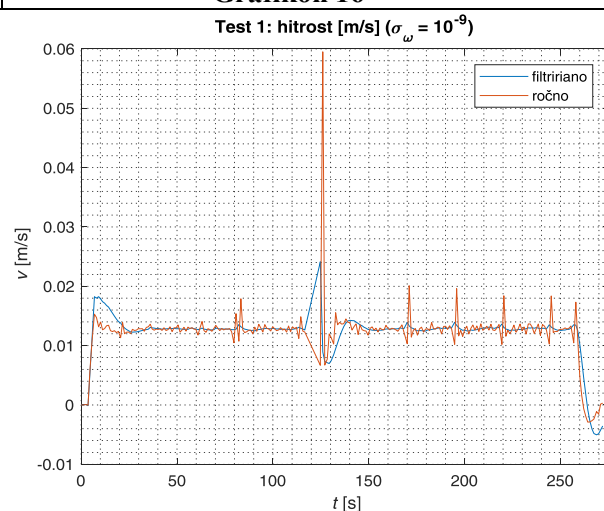
Koeficiente šuma σ_ω smo izbrali na podlagi najboljših rezultatov pri posamezni cenilki kakovosti z intervala $10^{-20} \text{m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10} \text{m/s}^2$ in predstavili rezultate srednje vrednosti intervala $\frac{1}{2} \Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$, kot prikazuje preglednica 8.

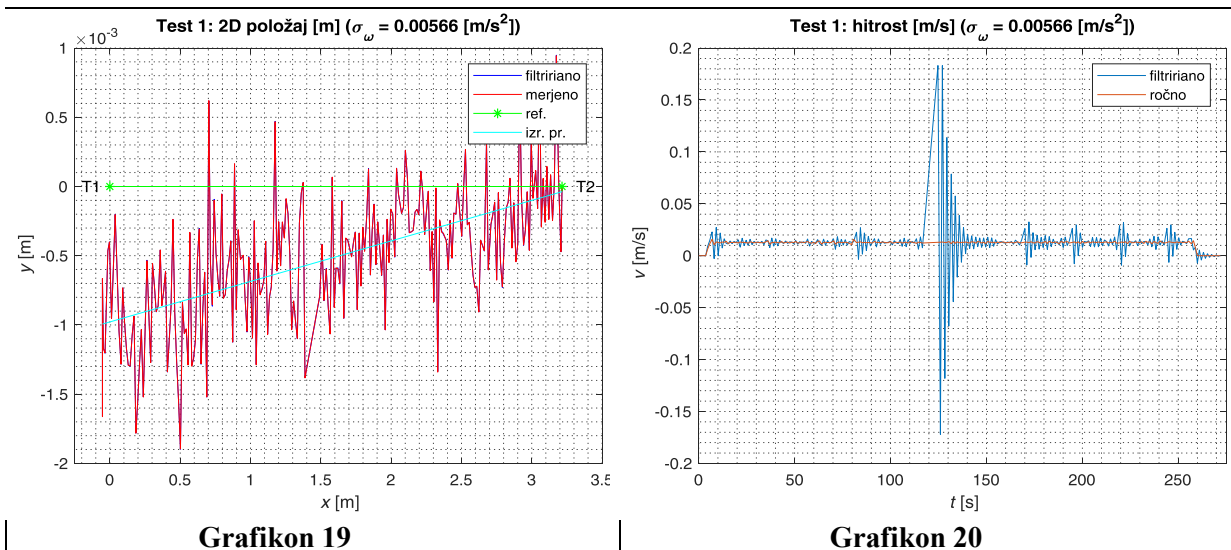
Preglednica 7: Izbor koeficientov šuma σ_ω za test 1

σ_ω [m/s ²]	Cenilka
$\sigma_\omega = 10^{-20}$	$\sum d = \min.$
$\sigma_\omega = 10^{-11}$	$r = \min.$
$\sigma_\omega = 10^{-10}$	$\sum d = \text{lokalni min.}$
$\sigma_\omega = 10^{-9}$	$\sum \Delta v = \min.$
$\sigma_\omega = 5,66$	$\frac{1}{2} \Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$

Za določitev optimalne vrednosti koeficienta šuma σ_ω za posamezen test prikazujemo rezultate pri različnih izbirah koeficientih šuma σ_ω z intervala $10^{-20} \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10} \text{ m/s}^2$. Kot rezultati so v levem stolpcu grafikonov 11 – 20 prikazani 2D položaji filtriranih točk glede na merjene točke, referenčna linija in izravnana premica. Desni stolpec grafikonov 11–20 predstavlja razliko med izračunanimi hitrostmi merjenih točk ter hitrosti filtriranih točk, pridobljenimi iz zanke Kalmanovega filtra.



**Grafikon 13****Grafikon 14****Grafikon 15****Grafikon 16****Grafikon 17****Grafikon 18**



Grafikon 11–20: Prikaz 2D položaja filtriranih točk in hitrosti pri različni izbiri σ_ω za test 1, levi stolpec: zeleno – referenčna linija, cian – izravnana premica, modra – filtrirane točke, rdeča – merjene točke, desni stolpec: rdeča – izračunane hitrosti iz koordinat merjenih točk, modro – hitrosti iz Kalmanovega filtra

V prvem primeru smo izbrali koeficient šuma $\sigma_\omega = 10^{-20} [m/s^2]$, kjer ima funkcija vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ globalni minimum. Z grafikona 11 vidimo, da se filtrirane točke zelo dobro približajo izravnani premici, vendar je oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko večja od 13 cm. Tudi filtrirane hitrosti se v tem primeru zelo zgladijo, kar pomeni, da je vsota (absolutnih) razlik hitrosti med merjenimi in filtriranimi točkami $\sum |\Delta v|$ velika. Zaupanje v model je veliko.

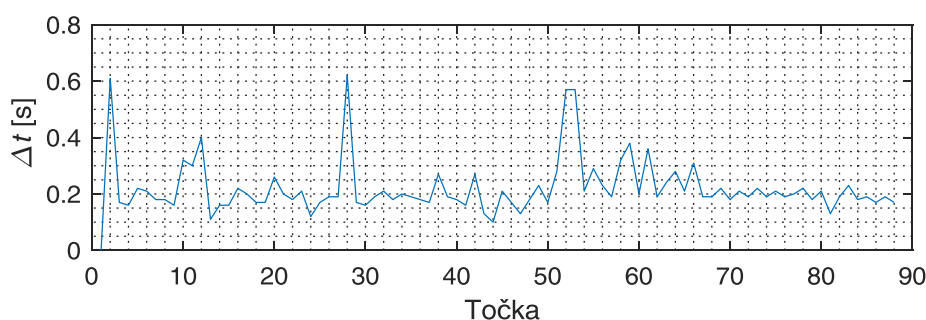
Grafikona 13 in 14 predstavljata 2D položaj in hitrost pri koeficientu šuma $\sigma_\omega = 10^{-11} [m/s^2]$, kjer je oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko minimalna. Filtrirane točke se še vedno dobro prilagajajo izravnani premici, čeprav je z grafikona 13 vidna manjša zglajenost in posledično večje prilagajanje meritvam. Vidno se zmanjša oddaljenost r med zadnjima točkama, ki je v tem primeru manjša od 1 cm, filtrirana hitrost na grafikonu 14 pa se vidno bolje prilega izračunani hitrosti.

Koeficient šuma $\sigma_\omega = 10^{-10} [m/s^2]$ je bil določen na podlagi lokalnega minimuma funkcije vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum |d|$, $\sigma_\omega = 10^{-9} [m/s^2]$ pa pri minimumu vsote (absolutnih) razlik hitrosti $\sum |\Delta v|$. Grafikona 15 in 17 sta zelo podobna grafikonu 13. Filtrirane točke so podobno razpršene, vedno bolj se prilegajo merjenim točkam, njihovi pravokotni odmiki od referenčne linije in izravnane premice so malo večji. Oddaljenost med zadnjima točkama se relativno malo poveča, graf filtriranih hitrost se še bolj prilagaja izračunanim. V primeru grafikona 18 so odstopanja med grafoma hitrosti najmanjša na intervalu.

Grafikona 19 in 20 prikazujeta pravokotne 2D položaj filtriranih točk in hitrosti pri izbiri koeficienta σ_ω z intervala $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$. V primeru enakomernega gibanja je maksimalna sprememba pospeška $7,54 \text{ mm/s}^2$ koeficient šuma σ_ω se giblje na intervalu $3,77 \text{ mm/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 7,54 \text{ mm/s}^2$. Če uporabimo v izračunu vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum|d|$ vrednost $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} = 3,77 \text{ mm/s}^2$, dobimo $\sum|d| = 136,8 \text{ mm}$. Če pa uporabimo vrednost $\Delta a_{MAX} = 7,54 \text{ mm/s}^2$, pa dobimo enako vrednost $\sum|d| = 136,8 \text{ mm}$. Zato prikazujemo na grafikonu 19 in 20 2D položaj in hitrost pri $\sigma_\omega = 5,66 \text{ mm/s}^2$.

Na podlagi rezultatov, ki jih dobimo, vidimo, da filtrirane točke skoraj sovpadajo z merjenimi. V tem primeru ima Kalmanov filter minimalen vpliv na končen rezultat. Filtrirane hitrosti v tem primeru zelo odstopajo od računanih. Koordinate filtriranih točk se glede na merjene skoraj ne spremenijo. Z rezultatov lahko sklepamo, da Kalmanov filter v teh pogojih skoraj ni imel vpliva na končne rezultate.

Pri testu 2 smo s *Tracking* načinom merjenja merili reflektor pri pospešenem gibanju. Voziček, na katerega je bil pritrjen reflektor, smo v tem primeru premikali ročno. Izmerjenih je bilo 89 točk. Časovni interval zajema smo nastavili na 0,2 sekunde, dejanska časovna frekvenca pa je prikazana na grafikonu 21, kjer so vidna odstopanja časovne frekvence med posameznimi meritvami.



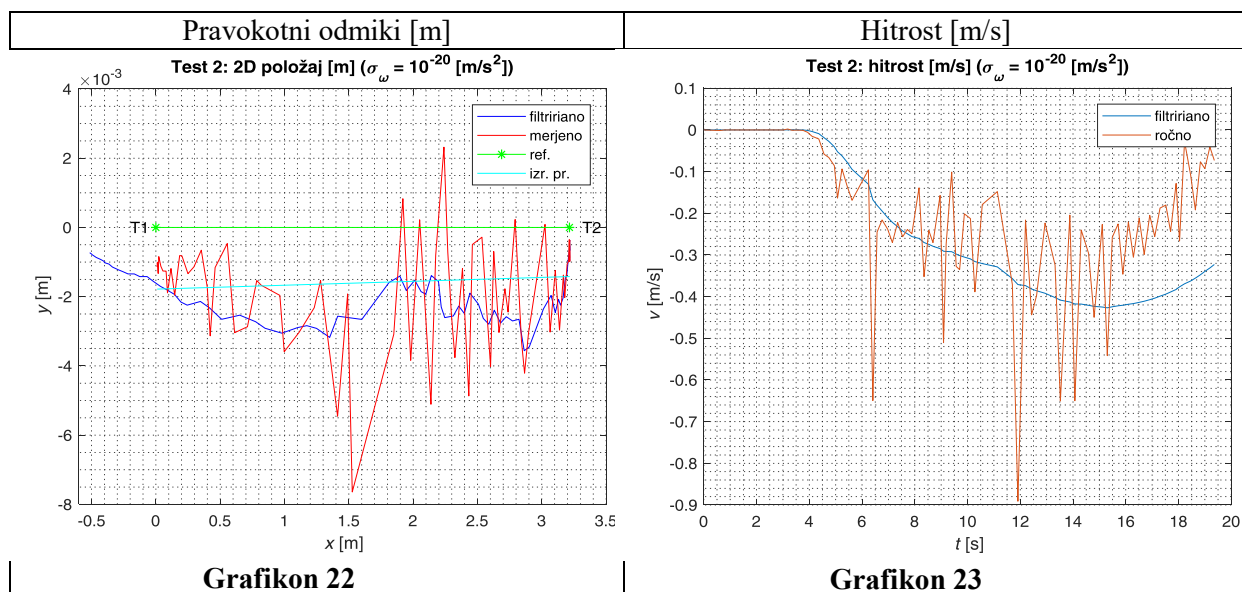
Grafikon 21: Časovni interval zajema med zaporednim zajemom merjenih točk pri testu 2

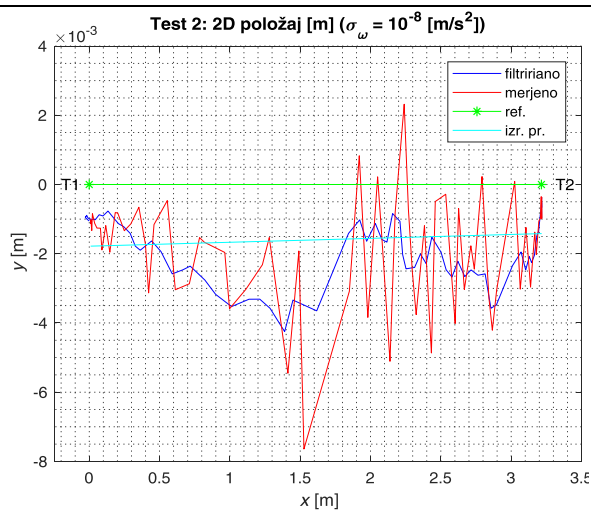
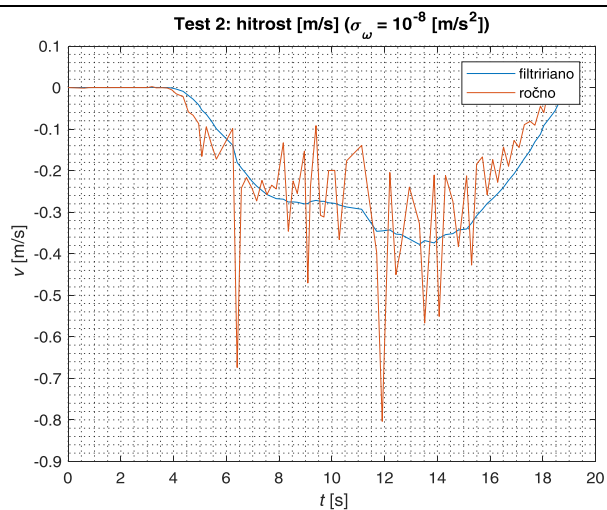
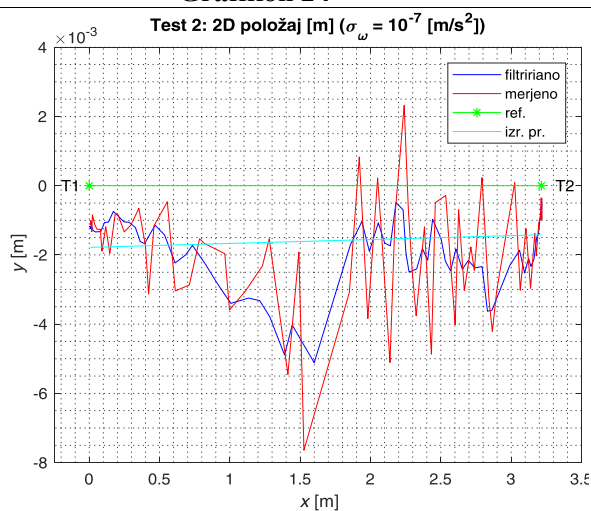
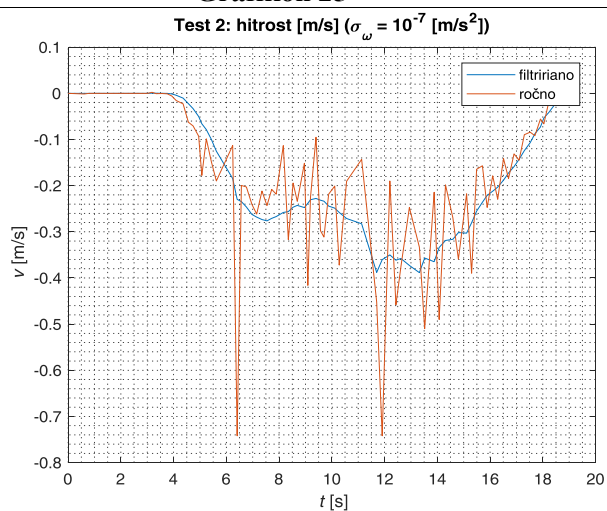
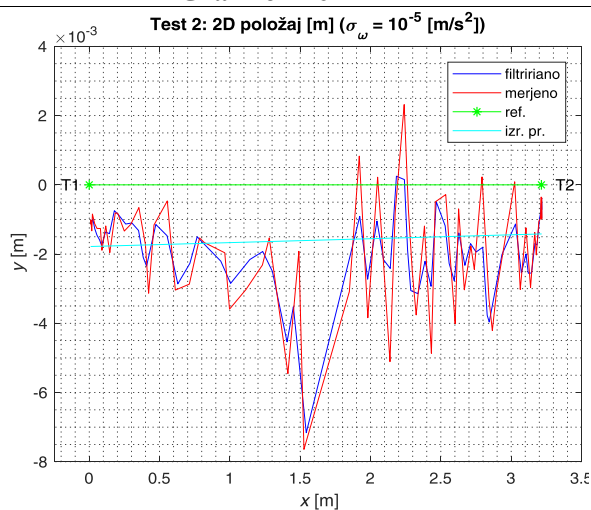
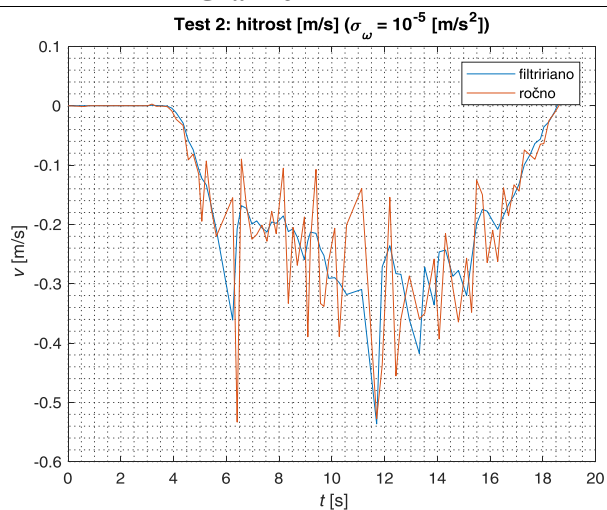
Koeficiente šuma σ_ω smo izbrali na podlagi najboljših rezultatov pri posamezni cenilki kakovosti z intervala $10^{-20} \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10} \text{ m/s}^2$ in predstavili rezultate srednje vrednosti intervala $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$, kot prikazuje preglednica 9.

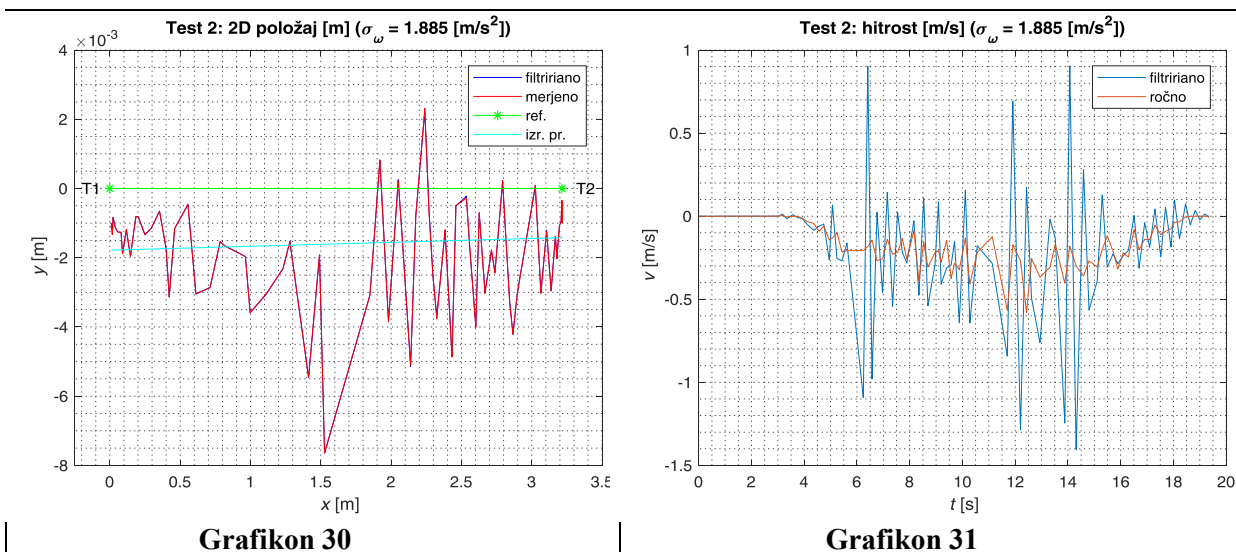
Preglednica 8: Izbor koeficientov šuma σ_ω za test 2

σ_ω [m/s ²]	Cenilka
$\sigma_\omega = 10^{-20}$	$\sum d = \min.$
$\sigma_\omega = 10^{-8}$	$r = \min.$
$\sigma_\omega = 10^{-7}$	$\sum d = \text{lokalni min.}$
$\sigma_\omega = 10^{-5}$	$\sum \Delta v = \min.$
$\sigma_\omega = 1885,65$	$\frac{1}{2} \Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$

Za določitev optimalne vrednosti koeficienta šuma σ_ω za posamezen test prikazujemo rezultate pri različnih izbirah koeficientih šuma σ_ω z intervala $10^{-20} \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10} \text{ m/s}^2$. Kot rezultati so v levem stolpcu grafikonov 22 – 31 prikazani 2D položaji filtriranih točk glede na merjene točke, referenčna linija in izravnana premica. Desni stolpec grafikonov 22–31 predstavlja razliko med izračunanimi hitrostmi merjenih točk ter hitrosti filtriranih točk, pridobljenimi iz zanke Kalmanovega filtra.



**Grafikon 24****Grafikon 25****Grafikon 26****Grafikon 27****Grafikon 28****Grafikon 29**



Grafikon 30 **Grafikon 31**
Grafikoni 22-31: Prikaz 2D položaja filtriranih točk in hitrosti pri različni izbiri σ_ω za test 2, levi stolpec: zeleno – referenčna linija, cian – izravnana premica, modra – filtrirane točke, rdeča – merjene točke, desni stolpec: rdeča – izračunane hitrosti iz koordinat merjenih točk, modro – hitrosti iz Kalmanovega filtra

V prvem primeru smo izbrali koeficient šuma $\sigma_\omega = 10^{-20} [m/s^2]$, kjer ima funkcija vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ globalni minimum. Z grafikona 22 vidimo, da se filtrirane točke približajo izravnani premici, vendar je oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko večja od 50 cm. Zadnji točki sta v tem primeru na začetku grafikona 22, saj se je v testu 2 reflektor premikal od točke T2 proti točki T1. Filtrirane hitrosti z grafikona 23 se zgladijo, posledično je vsota (absolutnih) razlik hitrosti med merjenimi in filtriranimi točkami $\sum |\Delta v|$ velika. Prav tako je veliko zaupanje v model.

Grafikona 24 in 25 predstavljata 2D položaj in hitrost pri koeficientu šuma $\sigma_\omega = 10^{-8} [m/s^2]$, kjer je oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko minimalna. Filtrirane točke se še vedno dobro prilagajajo izravnani premici, čeprav je z grafikona 24 vidna manjša zglajenost in posledično večje prilagajanje meritvam kot v primeru grafikona 22. Vidno se zmanjša oddaljenost r med zadnjima točkama, ki je v tem primeru manjša od 1 cm, filtrirana hitrost na grafikonu 25 pa je v primerjavi z merjeno še vedno zelo zglajena.

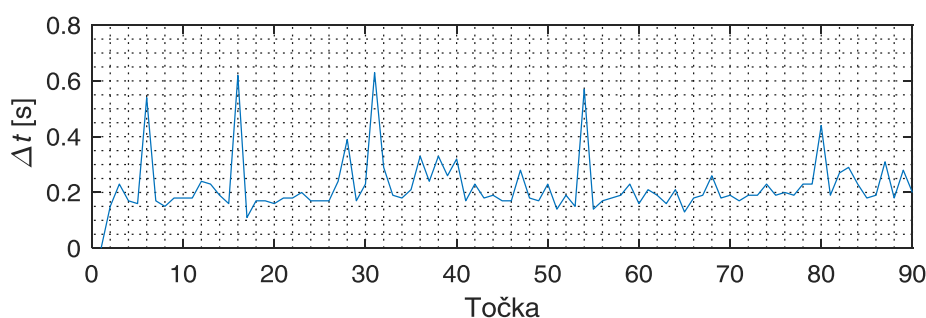
Koeficient šuma $\sigma_\omega = 10^{-7} [m/s^2]$ je bil določen na podlagi lokalnega minimuma funkcije vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum |d|$, $\sigma_\omega = 10^{-5} [m/s^2]$ pa pri minimumu vsote (absolutnih) razlik hitrosti $\sum |\Delta v|$. Filtrirane točke grafikona 26 so podobno razpršene kot na grafikonu 24, medtem ko se filtrirane točke z grafikona 28 že vidno bolj prilagajajo merjenim točkam. Pravokotni odmiki od referenčne linije in izravnane premice so večji. Oddaljenost r med zadnjima točkama se relativno malo poveča, linija filtriranih hitrosti se z manjšanjem σ_ω vedno bolj prilagaja izračunanim (glej grafikona 27 in 29). V primeru grafikona 29 so odstopanja med grafoma hitrosti najmanjša na intervalu.

Grafikona 30 in 31 prikazujeta pravokotne 2D položaj filtriranih točk in hitrosti pri izbiri koeficienta σ_ω z intervala $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$. V primeru testa 2 je maksimalna sprememba pospeška $2,51 \text{ m/s}^2$. Če uporabimo v izračunu vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum|d|$ vrednost $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} = 1,25 \text{ m/s}^2$, dobimo $\sum|d| = 144,8 \text{ mm}$. V primeru $\Delta a_{MAX} = 2,51 \text{ m/s}^2$, se vsota (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum|d|$ razlikuje za $0,003 \text{ mm}$ glede na prejšnji izračun. Zaradi minimalne razlike $\sum|d|$ na intervalu $1,25 \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 2,51 \text{ m/s}^2$ prikazujemo na grafikonu 30 in 31 2D položaj in hitrost s sredine intervala $\sigma_\omega = 1,88 \text{ m/s}^2$.

Na podlagi rezultatov, ki jih dobimo, vidimo, da filtrirane točke skoraj sovpadajo z merjenimi. V tem primeru smo zaupali skoraj samo meritvam. Filtrirane hitrosti v tem primeru zelo odstopajo od računanih, čeprav se koordinate filtriranih točk glede na merjene bistveno ne spremenijo. Z rezultatov lahko sklepamo, da Kalmanov filter v teh pogojih skoraj ni imel vpliva na končne rezultate.

ii. Pospešeno gibanje – test 3

Pri testu 3 smo s *Tracking* načinom merjenja merili reflektor pri pospešenem gibanju. Voziček, na katerega je bil pritrjen reflektor, smo tudi v tem primeru premikali ročno. Izmerjenih je bilo 90 točk. Časovni interval zajema smo nastavili na 0,2 sekunde, dejanska časovna frekvenca pa je prikazana na grafikonu 32, kjer so vidna odstopanja časovne frekvence med posameznimi meritvami.



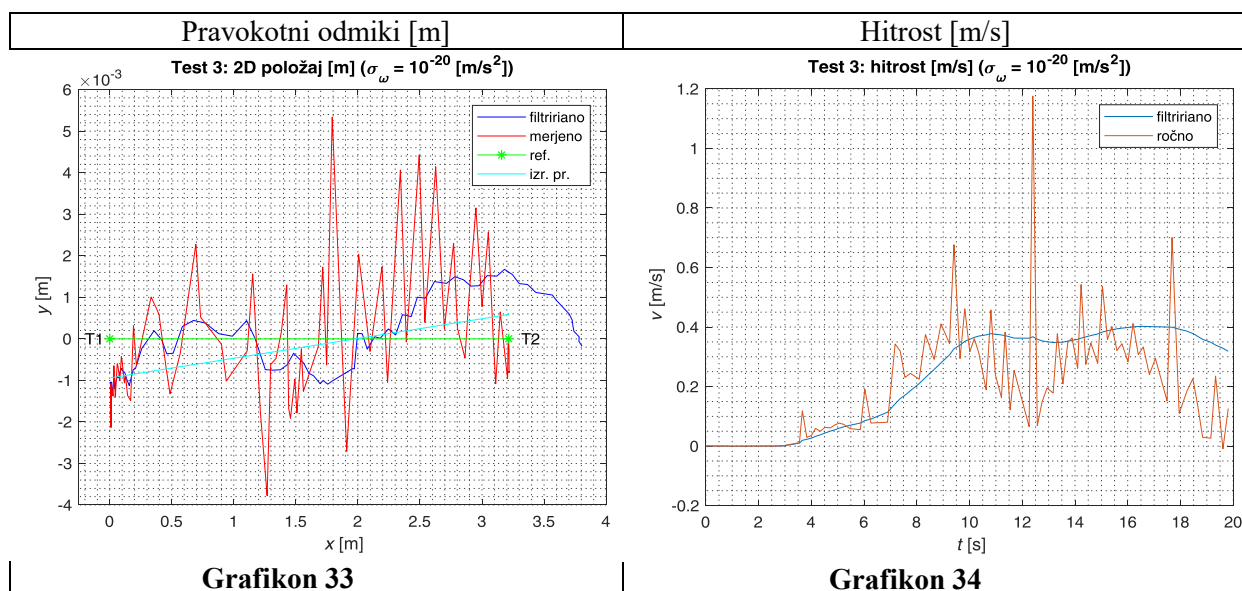
Grafikon 32: Časovni interval zajema med zaporednim zajemom merjenih točk pri testu 3

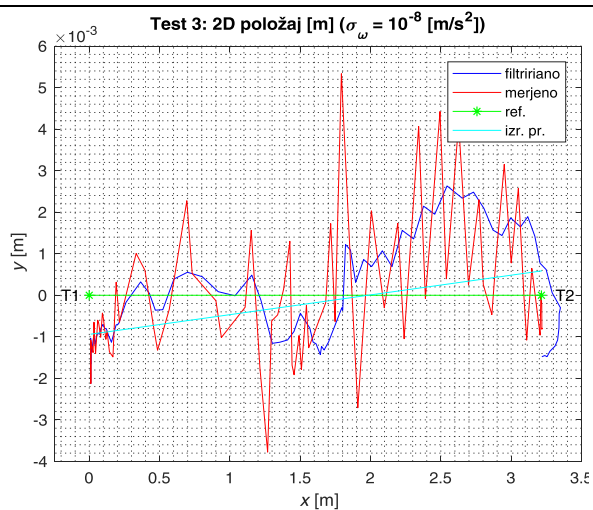
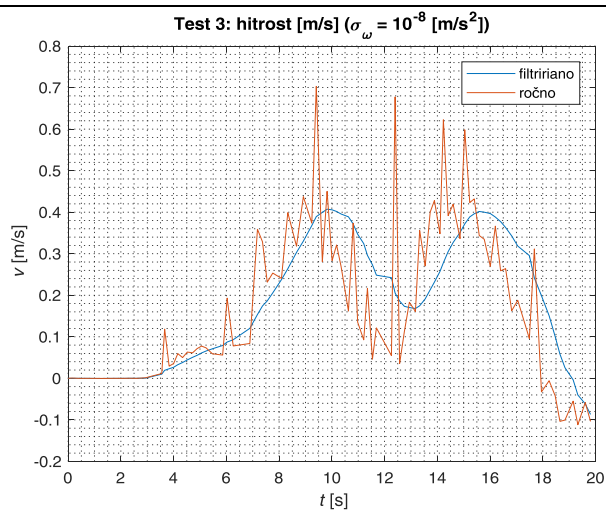
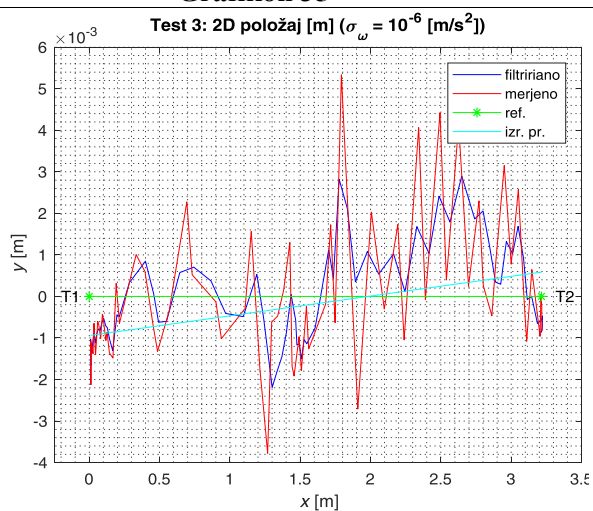
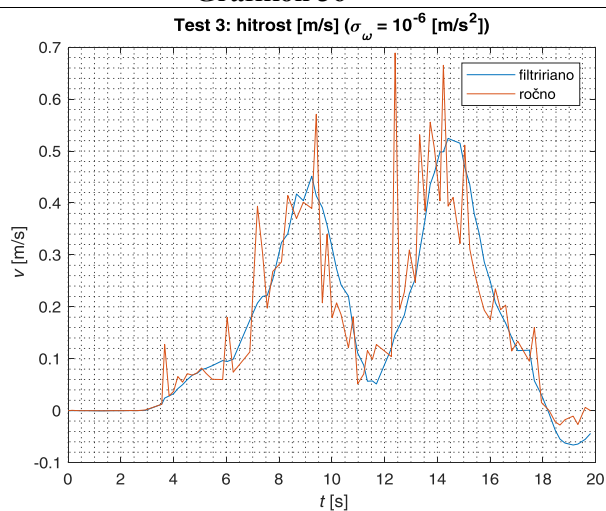
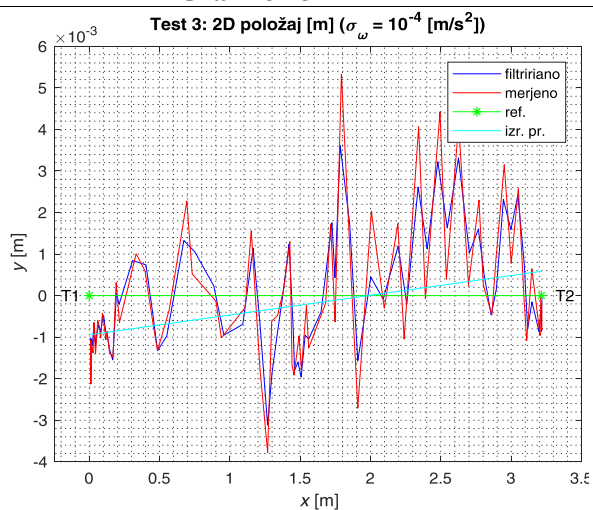
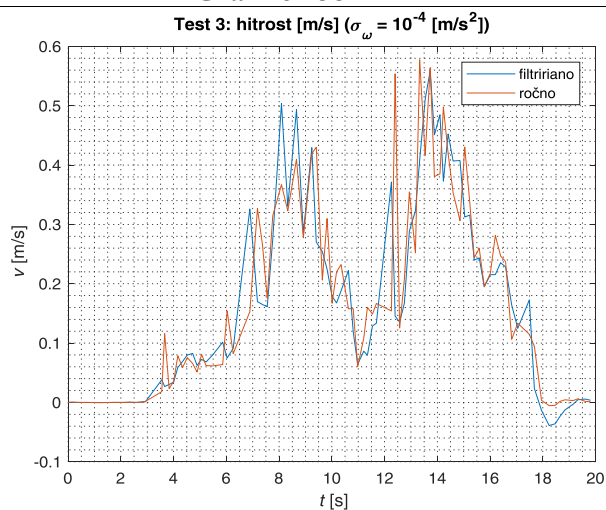
Koeficiente šuma σ_ω smo izbrali na podlagi najboljših rezultatov pri posamezni cenilki kakovosti z intervala $10^{-20} \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10} \text{ m/s}^2$ in predstavili rezultate srednje vrednosti intervala $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$, kot prikazuje preglednica 10.

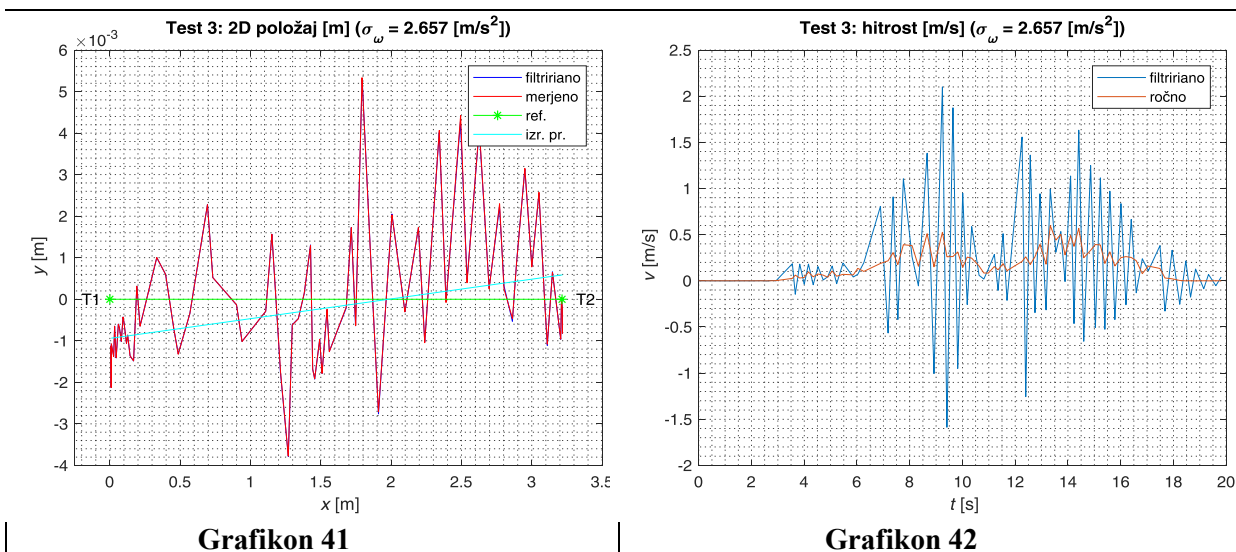
Preglednica 9: Izbor koeficientov šuma σ_ω za 3. test

σ_ω [m/s ²]	Cenilka
$\sigma_\omega = 10^{-20}$	$\sum d = \min.$
$\sigma_\omega = 10^{-8}$	$r = \min.$
$\sigma_\omega = 10^{-6}$	$\sum d = \text{lokalni min.}$
$\sigma_\omega = 10^{-4}$	$\sum \Delta v = \min.$
$\sigma_\omega = 2657,98$	$\frac{1}{2} \Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$

Za določitev optimalne vrednosti koeficienta šuma σ_ω za posamezen test prikazujemo rezultate pri različnih izbirah koeficientih šuma σ_ω z intervala $10^{-20} \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10} \text{ m/s}^2$. Kot rezultati so v levem stolpcu grafikonov 33 – 42 prikazani 2D položaji filtriranih točk glede na merjene točke, referenčna linija in izravnana premica. Desni stolpec grafikonov 33 – 42 predstavlja razliko med izračunanimi hitrostmi merjenih točk ter hitrosti filtriranih točk, pridobljenimi iz zanke Kalmanovega filtra.



**Grafikon 35****Grafikon 36****Grafikon 37****Grafikon 38****Grafikon 39****Grafikon 40**



Grafikoni 33-42: Prikaz 2D položaja filtriranih točk in hitrosti pri različni izbiri σ_ω za test 3, levi stolpec: zeleno – referenčna linija, cian – izravnana premica, modra – filtrirane točke, rdeča – merjene točke, desni stolpec: rdeča – izračunane hitrosti iz koordinat merjenih točk, modro – hitrosti iz Kalmanovega filtra

V prvem primeru smo enako kot v pri prejšnjih testih izbrali koeficient šuma $\sigma_\omega = 10^{-20} [m/s^2]$, kjer ima funkcija vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum |d|$ globalni minimum. Z grafikona 33, glede na ostale grafike testa 3, vidimo, da se filtrirane točke najbolj približajo izravnani premici, vendar je oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko okrog 58 cm. Vsota (absolutnih) razlik hitrosti med merjenimi in filtriranimi točkami $\sum |\Delta v|$ na grafu 34 je velika, saj so filtrirane hitrosti v primerjavi z merjenimi zelo zglajene. Zaupanje v model je veliko.

Grafikona 35 in 36 predstavljata 2D položaj in hitrost pri koeficientu šuma $\sigma_\omega = 10^{-8} [m/s^2]$, kjer je oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko minimalna. Filtrirane točke se še vedno dobro prilagajajo izravnani premici. Zaradi hitre zaustavitve reflektorja na koncu meritev, Kalmanov filter potrebuje nekaj iteracij preden zazna spremembo hitrosti in pospeška. To se dobro vidi na grafikonu 25, kjer se filtrirane točke proti koncu za kratek čas oddaljijo od zadnje merjene, nato pa se približajo nazaj. Zmanjša se oddaljenost r med zadnjima točkama, ki je v tem primeru manjša od 1 mm, filtrirana hitrost na grafikonu 36 se vidno bolje prilega izračunani hitrosti. Na grafikonu 36 je dobro ponazorjena zakasnitev Kalmanovega filtra zaradi hitrih sprememb gibanja reflektorja.

Koeficient šuma $\sigma_\omega = 10^{-6} [m/s^2]$ je bil določen na podlagi lokalnega minimuma funkcije vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum |d|$, rezultate prikazujeta grafikona 37 in 38, $\sigma_\omega = 10^{-4} [m/s^2]$ pa pri minimumu vsote (absolutnih) razlik hitrosti $\sum |\Delta v|$ (glej grafikona 39 in 40). Oblika linije grafa filtriranih točk se z večanjem σ_ω približuje liniji merjenih točk, tudi zakasnitve hitrosti ni več (glej grafikona 38 in 40). Oddaljenost r med zadnjima točkama se minimalno poveča, graf filtriranih hitrost se še bolj prilagaja izračunanim.

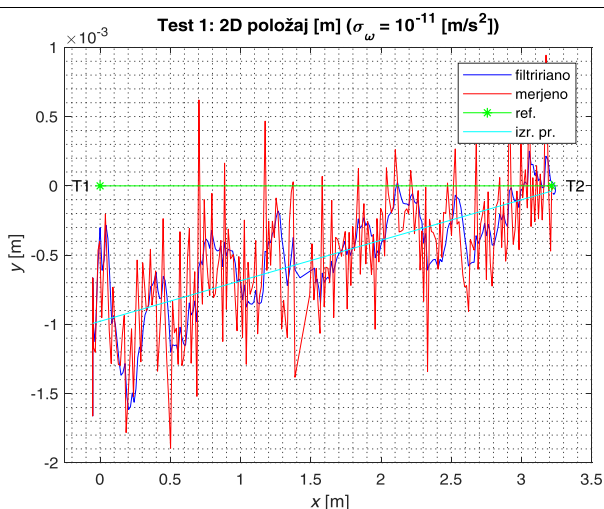
Grafikona 41 in 42 prikazujeta pravokotne 2D položaj filtriranih točk in hitrosti pri izbiri koeficienta σ_ω z intervala $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$. V primeru testa 3 je maksimalna sprememba pospeška $3,36 \text{ m/s}^2$, koeficient šuma σ_ω se giblje na intervalu $1,68 \text{ m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 3,36 \text{ m/s}^2$. Če uporabimo v izračunu vsote (absolutnih) pravokotnih odmikov $\sum |d|$ obe skrajni vrednosti z intervala, razlik praktično ni. Zato prikazujemo na grafikonu 41 in 42 2D položaj in hitrost pri sredini intervala $\sigma_\omega = 2,66 \text{ m/s}^2$.

Na podlagi rezultatov, ki jih dobimo na grafikonih 41 in 42, vidimo, da se filtrirane točke od merjenih ne razlikujejo. Grafikon 42, ki prikazuje merjene in filtrirane hitrosti, ne prikazuje logičnih rezultatov. Zato obdelava s Kalmanovim filtrom, glede na naše teste na intervalu $\frac{1}{2}\Delta a_{MAX} \leq \sigma_\omega \leq \Delta a_{MAX}$, ni smiselna.

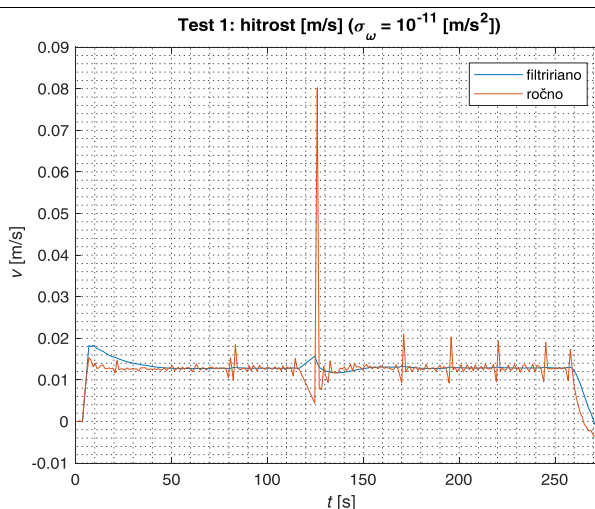
4.2.3 Optimalna izbira koeficienta šuma σ_ω

i. enakomerno gibanje – test 1

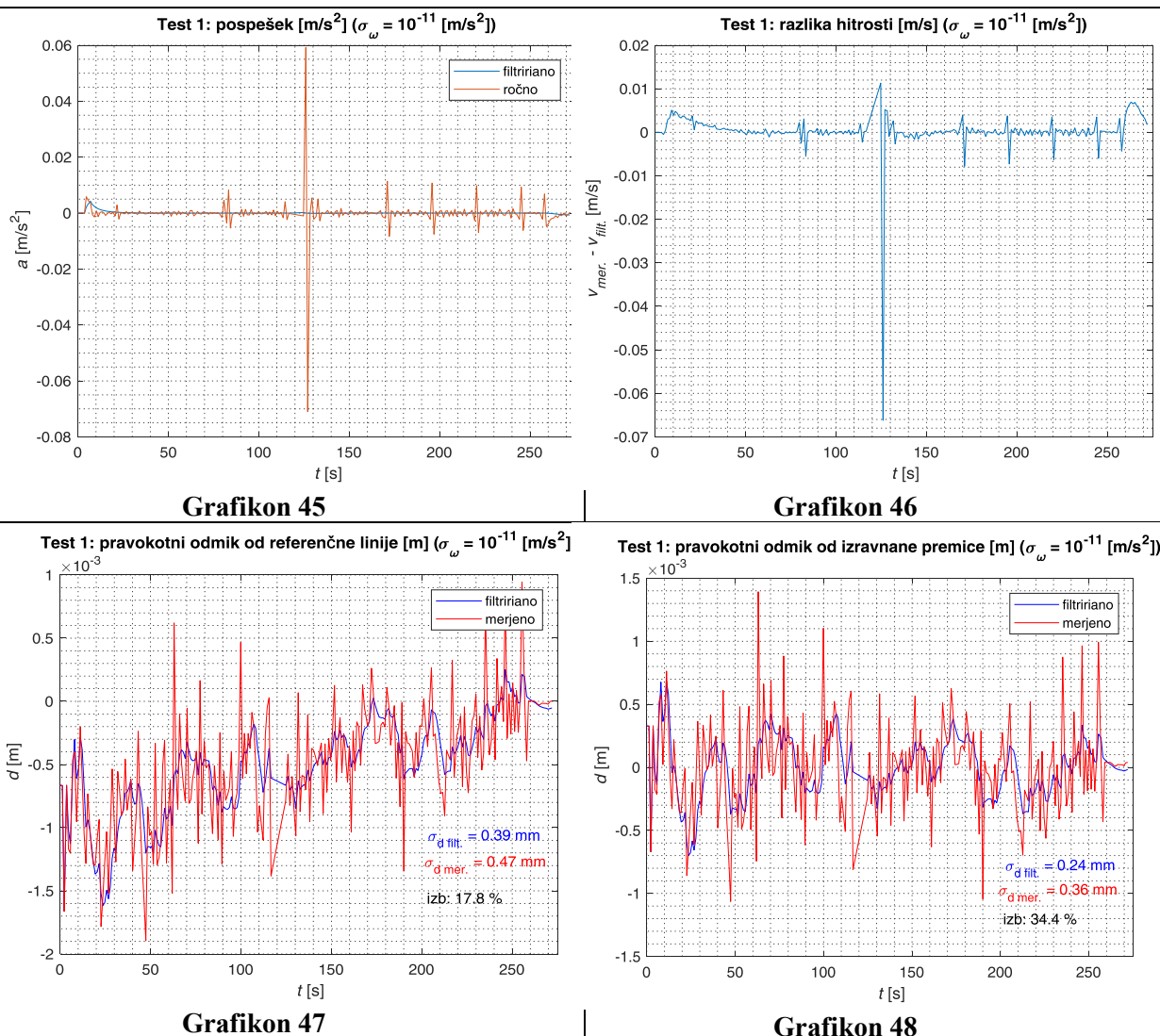
V primeru testa 1 bi glede na izbrane cenilke kakovosti kot najbolj optimalno izbiro koeficienta šuma σ_ω izbrali $\sigma_\omega = 10^{-11} [\text{m/s}^2]$. Oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko je bila v tem delu intervala najmanjša, vsota (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk od izravnane premice $\sum |d|$ se je približala lokalnemu minimumu. Vsota (absolutnih) razlik hitrosti med merjenimi in filtriranimi točkami $\sum |\Delta v|$ ni bila veliko večja od minimalne vrednosti na intervalu.



Grafikon 43



Grafikon 44



Grafikoni 43-48: Izračuni pri optimalni oceni parametrov za test 1, grafikon 43 – 2D položaj filtriranih točk (modra) in merjenih točk (rdeča) glede na referenčno linijo (zelena) in izravnano premico (cian), grafikon 44 – hitrost merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 45 – pospešek merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 46 – razlika hitrosti merjenih in filtriranih točk, grafikon 47 – pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od referenčne linije, grafikon 48 – pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od izravnane premice

Na grafikonih 43-48 so prikazani izračuni pri optimalni oceni koeficienta šuma σ_ω za test 1. Na grafikonu 45 sta prikazana izračunan pospešek iz koordinat merjenih točk in pospešek filtriranih točk iz Kalmanovega filtra. Filtriran pospešek ima na začetku nekaj poskoka zaradi začetka gibanja in pospeševanja na želeno hitrost, nato se povsem približa ničli skozi celoten filter filter (saj imamo enakomerno gibanje, ko je pospešek enak 0 mm/s²). V testu 1 filter dobro opiše enakomerno gibanje.

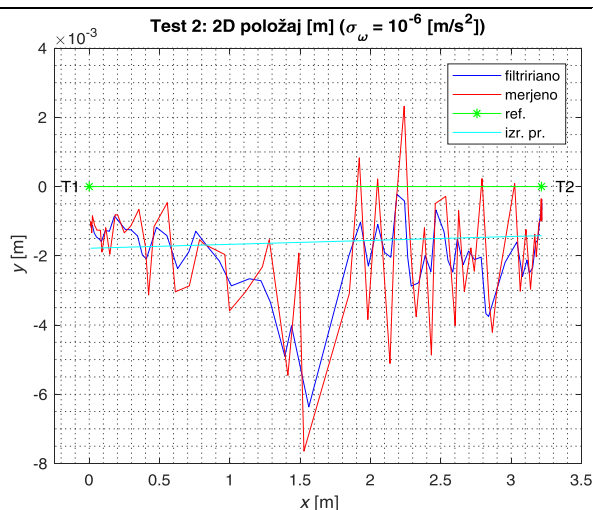
Grafikon 46 prikazuje razlike med izračunanimi hitrostmi iz koordinat merjenih točk in hitrosti filtriranih točk preračunane iz zanke Kalmanovega filtra. Če pogledamo grafikon 44, se večje razlike pojavijo na mestih, kjer so bile merjene hitrosti večje. V primeru, da do razlik ne bi prišlo, bi imel graf obliko ravne linije vzporedne abscisni osi (saj imamo enakomerno gibanje, ko je hitrost konstantna).

Pravokotni odmiki filtriranih točk se glede na pravokotne odmike merjenih točk zmanjšajo tako v primeru referenčne linije kot tudi izravnane premice. Pravokotne odmike filtriranih in merjenih točk prikazujeta grafikona 47 (od izravnane premice) in 48 (od referenčne linije).

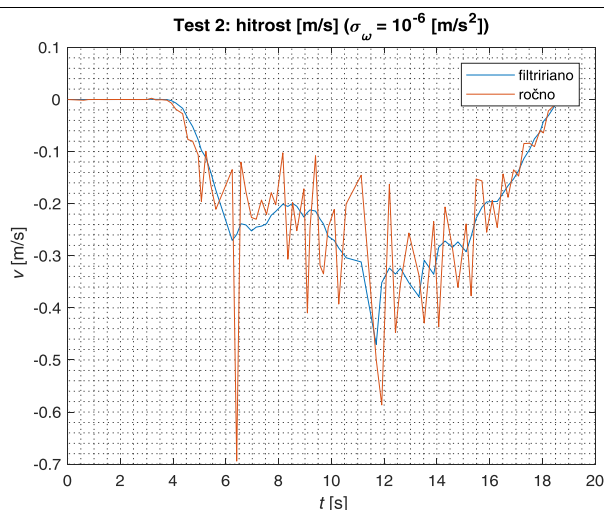
Izboljšavo pravokotnih odmikov filtriranih točk glede na merjene točke smo ocenili na podlagi razmerja standardnih odklonov pravokotnih odmikov med filtriranimi in merjenimi koordinatami točk od referenčne linije ali izravnane premice. Izboljšava glede na referenčno linijo je bila 17,8 %, glede na izravnano premico pa 34,4 %, kot lahko razberemo iz grafikonov 47 in 48.

ii. Pospešeno gibanje – test 2

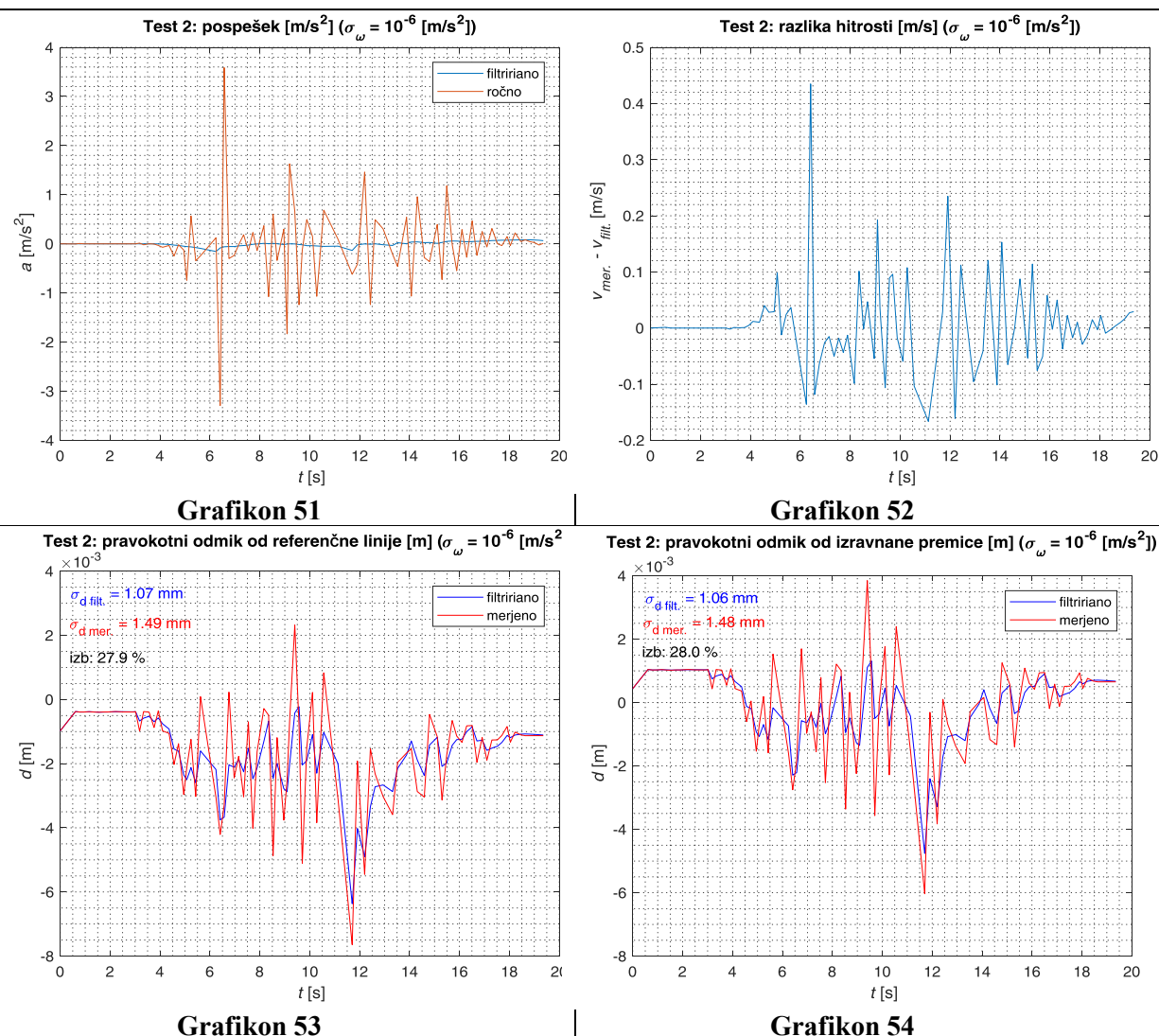
V primeru testa 2 bi glede na izbrane cenilke kakovosti kot najbolj optimalno izbiro koeficienta šuma σ_ω izbrali $\sigma_\omega = 10^{-6} [m/s^2]$. Oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko je bila v tem delu intervala manjša kot 1 mm, vsota (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk od izravnane premice $\sum |d|$ se je približala lokalnemu minimumu. Vsota (absolutnih) razlik hitrosti med merjenimi in filtriranimi točkami $\sum |\Delta v|$ v tem primeru znaša 4,3 m/s, v minimumu ($\sigma_\omega = 10^{-7}$) pa 3,9 m/s.



Grafikon 49



Grafikon 50



Grafikoni 49-54: Izračuni pri optimalni oceni parametrov za test 2, grafikon 49 – 2D položaj filtriranih točk (modra) in merjenih točk (rdeča) glede na referenčno linijo (zelena) in izravnano premico (cian), grafikon 50 – hitrost merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 51 – pospešek merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 52 – razlika hitrosti merjenih in filtriranih točk, grafikon 53– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od referenčne linije, grafikon 54– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od izravnane premice

Na grafikonih 49-54 so prikazani izračuni pri optimalni oceni koeficienta šuma σ_ω za test 2. Grafikona 49 in 50 prikazujeta 2D položaj in hitrost merjenih ter filtriranih točk. Hitrost izračunana iz Kalmanovega filtra se relativno dobro prilega merjeni, prav tako je dobro vidna izboljšava 2D položaja na grafikonu 49.

Na grafikonu 51 sta prikazana izračunan pospešek iz koordinat merjenih točk in pospešek filtriranih točk iz Kalmanovega filtra. Pospešek preračunan iz zanke Kalmanovega filtra se giblje zelo blizu abscisne osi (0 m/s²), kar ni najbolj logično, saj je šlo v tem primeru za pospešeno gibanje.

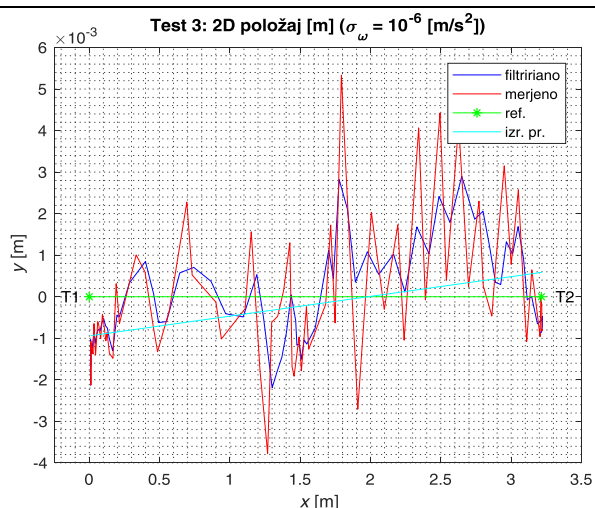
Grafikon 52 prikazuje razlike med izračunanimi hitrostmi iz koordinat merjenih točk in hitrosti filtriranih točk preračunane iz zanke Kalmanovega filtra. Če pogledamo grafikon 50 se večje razlike pojavijo na mestih, kjer so bile merjene hitrosti večje.

Pravokotni odmiki filtriranih točk se glede na pravokotne odmike merjenih točk zmanjšajo tako v primeru referenčne linije kot tudi izravnane premice. Pravokotne odmike filtriranih in merjenih točk prikazujeta grafikona 53 (od izravnane premice) in 54 (od referenčne linije).

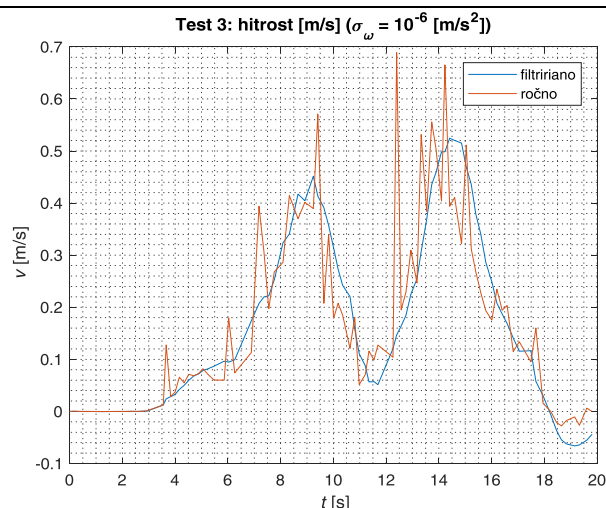
Izboljšava pravokotnih odmkov filtriranih točk glede na merjene točke na podlagi razmerja standardnih odklonov pravokotnih odmkov med filtriranimi in merjenimi koordinatami točk od referenčne linije znaša 27,9 %, od izravnane premice pa 28,0 %. Izboljšava glede na referenčno linijo in izravnano premico je razvidna iz grafikonov 53 in 54.

iii. Pospešeno gibanje – test 3

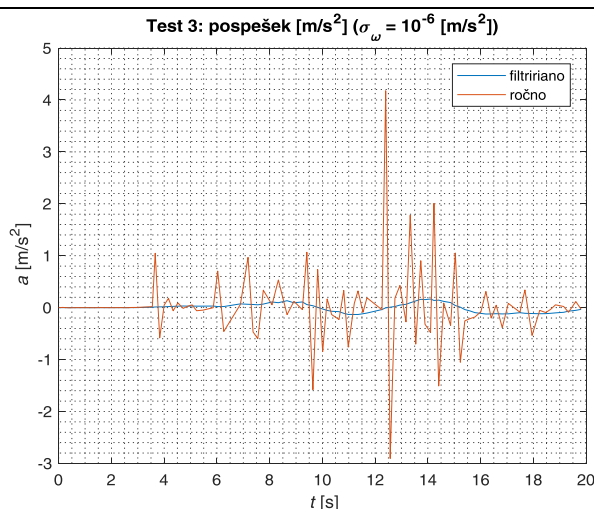
V primeru testa 3 bi glede na izbrane cenilke kakovosti kot najbolj optimalno izbiro koeficienta šuma σ_ω izbrali $\sigma_\omega = 10^{-6} [m/s^2]$. Oddaljenost r med zadnjo filtrirano in merjeno točko je bila v tem delu intervala najmanjša, vsota (absolutnih) pravokotnih odmkov filtriranih točk od izravnane premice $\sum |d|$ se je približala lokalnemu minimumu. Vsota (absolutnih) razlik hitrosti med merjenimi in filtriranimi točkami $\sum |\Delta v|$ ni bila veliko večja od minimalne vrednosti na intervalu.



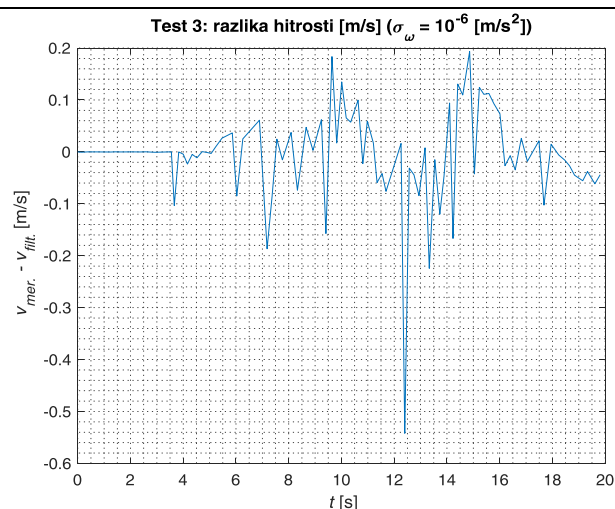
Grafikon 55



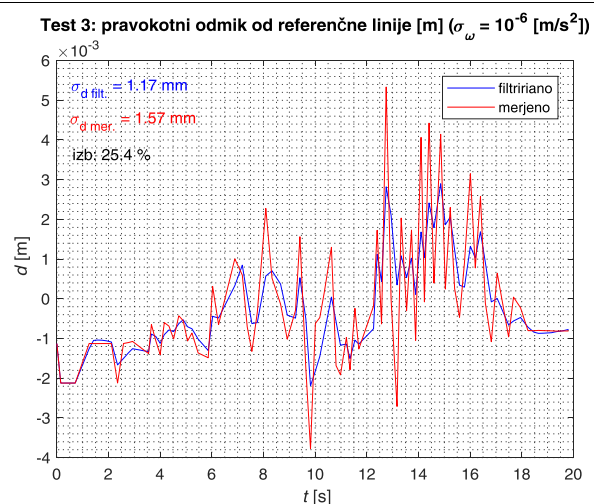
Grafikon 56



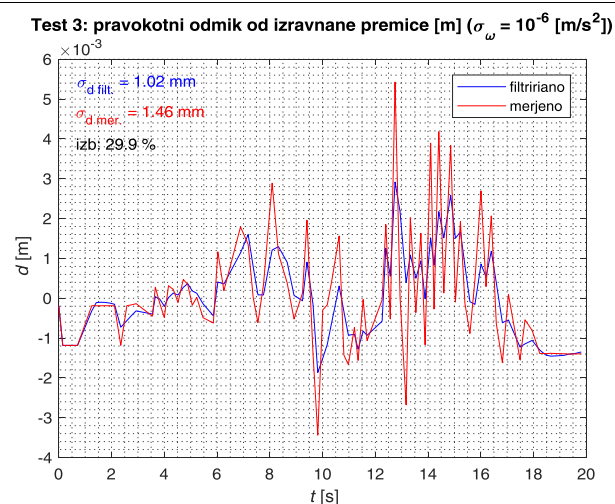
Grafikon 57



Grafikon 58



Grafikon 59



Grafikon 60

Grafikoni 55-60: Izračuni pri optimalni oceni parametrov za test 3, grafikon 55 – 2D položaj filtriranih točk (modra) in merjenih točk (rdeča) glede na referenčno linijo (zeleno) in izravnano premico (cian), grafikon 56 – hitrost merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 57 – pospešek merjenih točk (oranžna) in filtriranih točk (modra), grafikon 58 – razlika hitrosti merjenih in filtriranih točk, grafikon 59– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od referenčne linije, grafikon 60– pravokotni odmiki merjenih točk (rdeča) in filtriranih točk (modra) od izravnane premice

Grafikoni 55–60 prikazujejo izračune pri optimalni oceni koeficienta šuma σ_ω za test 3. Grafikona 55 in 56 prikazujeta 2D položaj in hitrost merjenih ter filtriranih točk. Hitrost izračunana iz zanke Kalmanovega filtra se oblikovno zelo dobro prilega merjeni, vidne pa so razlike med v 2D položaju merjenih in filtriranih točk na grafikonu 49.

Pospešek, izračunan iz koordinat merjenih točk in pospešek filtriranih točk, izračunan iz Kalmanovega filtra, sta prikazana na grafikonu 57. Podobno kot v testu 2 se pospešek giblje okrog ničle, kar ni v skladu s pospešenim gibanjem. Za razliko od testa 2, se na grafikonu 57 pospešek iz Kalmanovega

filtra oddaljuje od abscisne osi na območjih, kjer so bili pospeški izračunani iz koordinat merjenih točk največji.

Grafikon 58 prikazuje razlike med izračunanimi hitrostmi iz koordinat merjenih točk in hitrosti filtriranih točk preračunanih iz zanke Kalmanovega filtra. Če grafikon primerjamo z grafikonom 56, se največje razlike pojavijo na delih, kjer so bile hitrosti izračunane iz meritev največje.

Pravokotni odmiki filtriranih točk se glede na pravokotne odmike merjenih točk zmanjšajo tako v primeru referenčne linije kot tudi izravnane premice. Pravokotne odmike filtriranih in merjenih točk od referenčne linije prikazuje grafikon 59, od izravnane premice pa grafikon 60. Z grafikonov je vidna tudi izboljšava merjenih točk s Kalmanovim filtrom. V obeh primerih znaša izboljšava 29,9 %.

5 ZAKLJUČEK

Kinematične meritve prevzemajo vse bolj pomembno vlogo geodeziji, kakor tudi na ostalih področjih. Omogočajo spremljanje premikajočega in statičnega objekta, njihova natančnost se izboljša z naknadno obdelavo. Programska oprema danes omogoča obdelavo vse večjih količin podatkov, kar omogoča doseganje večjih natančnosti meritev. Postavlja pa se vprašanje kako usklajevati podatke različne kakovosti.

Kalmanov filter je ena izmed metod, ki zelo dobro združuje meritve različne kakovosti. Filter deluje na principu napovedi novega stanja iz statistične ocene predhodnih meritev. Ob optimalni oceni izbere najboljšo povezavo med meritvami in napovedjo. V našem primeru je filter na podlagi predhodnih meritev ocenil najbolj verjetno koordinato naslednje točke. V splošnem pa je filter uporaben tudi za spremljanje deformacij ali premikov, kjer združujemo rezultate izmere s predhodnimi izmerami, predvsem pri kinematičnih merjenjih.

Namen magistrske naloge je bil preizkusiti kinematično metodo izmere z instrumentom Leica TS30 na testnem polju, dobiti informacije o opravljenih meritvah ter meritve dodatno obdelati in izboljšati s Kalmanovim filtrom. Opravili smo tri teste pri različni hitrosti in različnem pospešku gibanja reflektorja. Pravokotni odmiki merjenih in filtriranih točk od referenčne linije in izravnane premice so bili najmanjši v primeru enakomernega, strojno vodenega gibanja.

Z uporabo Kalmanovega filtra smo uspeli izboljšati rezultate kinematičnih meritev, saj so bila odstopanja od referenčne linije in izravnane premice manjša. Velik vpliv na rezultate ima izbira parametrov, kjer določamo zaupanje v model gibanja in sama natančnost meritev. Prav tako je za dobro filtriranje začetnih meritev pomembna dobra inicializacija filtra.

Testirali smo vpliv koeficienta šuma σ_ω , z intervala $10^{-20}\text{m/s}^2 \leq \sigma_\omega \leq 10^{10}\text{m/s}^2$, na rezultate Kalmanovega filtra pri vseh treh testih. Kvaliteto rezultatov smo preverjali s tremi cenilkami kakovosti: vsoto (absolutnih) pravokotnih odmikov filtriranih točk $\sum|d|$ od referenčne linije ali izravnane premice, oddaljenost r med zadnjo filtrirano točko in zadnjo merjeno točko ter vsoto (absolutnih) razlik filtriranih in merjenih hitrosti $\sum|\Delta v|$. Za vsak test smo podali optimalno izbiro koeficienta šuma σ_ω ter dejansko izboljšavo glede na meritve.

6 VIRI

- (1) Leica Geosystems AG. 2013. Leica TS30/TM30 User Manual. Heerbrugg, Leica Geosystems: 84 str. <https://sccsurvey.co.uk/document-library/Leica-TPS/Leica-TS30/Manuals/Leica-TS30-TM30-User-Manual.pdf> (Pridobljeno 31. 03. 2020.)
- (2) Mataija Valh, M., Marjetič, A., Ježovnik, V., Kogoj, D. 2008. Avtomatski elektronski tahimetri ali kam vodi razvoj TPS sistemov. Geodetski vestnik 52 3: 487–499. http://www.geodetski-vestnik.com/52/3/gv52-3_487-499.pdf (Pridobljeno 31. 03. 2020.)
- (3) Vodopivec, F., Kogoj, D. 2002. Prvi komparator za kompariranje kodiranih nivelmanskih lat v Sloveniji. Geodetski vestnik 46 1&2: 11–21. <http://www.geodetski-vestnik.com/46/gv46-12.pdf> (Pridobljeno 29. 03. 2020.)
- (4) Bogatin S., Kogoj, D. 2006. Uporaba Kalmanovega filtra v terestrični geodeziji. Geodetski vestnik 50 2: 211–223. http://www.geodetski-vestnik.com/50/2/gv50-2_211-223.pdf (Pridobljeno 31. 03. 2020.)
- (5) Gamse S. 2010. Uporaba Kalmanovega filtra pri kinematičnih geodetskih meritvah. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (samozaložba S. Gamse): 96 f.
- (6) Hrvacki, K. 2017. Deformacijska analiza s kinematičnim deformacijskim modelom. Magistrsko delo. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (samozaložba K. Hrvacki): 73 f.
- (7) Leica Geosystems AG. 2010. Leica Geosystems original accessories. https://leica-geosystems.com//media/files/leicageosystems/products/brochures/leica_original_accessories_bro.ashx?la=en (Pridobljeno 29. 03. 2020.)
- (8) Kovandžić, M. Kalmanov filter. Seminarska naloga. Niš, Univerza v Nišu, Fakulteta za strojništvo. <http://www.marko.rs/author/files/KALMAN.pdf> (Pridobljeno 29. 03. 2020.)
- (9) Stopar, B. 2017. Enačbe Kalmanovega filtra. Gradivo s predavanj. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

- (10) Leica TS30 monitoring total station . <https://www.zenithsurvey.co.uk/product/leica-ts30-monitoring-total-station/> (Pridobljeno 29. 03. 2020.)
- (11) Leica TS13 Robotic. <http://www.geoservis.si/produkti/64-tahimetri-za-geodezijo-in-inzenirsko-geodezijo/424-leica-ts13> (Pridobljeno 29. 03. 2020.)
- (12) Leica GPH1P. <https://www.geoshop.si/p/3-5-1-1/LEICA-GPH1P-Izjemno-natančna-prizma-odmik-34-m-> (Pridobljeno 25. 03. 2020.)
- (13) Originalni pribor Leica Geosystems. <http://www.geoservis.si/produkti/72-pribor-za-geodezijo/103-originalni-prbor-leica-geosystems> (Pridobljeno 20. 03. 2020.)
- (14) Izravnavanje numeričnih podatkov. <https://www.fmf.uni-lj.si/~pavesic/POUK/BIOKEMIJA/Matematika%201%202009-2010/17.pdf> (Pridobljeno 5. 04. 2020.)